Giovanni Filocamo

Il matematico curioso

Dalla geometria del calcio all'algoritmo dei tacchi a spillo

KOWALSKI

VISIT…

IL MATEMATICO CURIOSO
DALLA GEOMETRIA DEL CALCIO ALL'ALGORITMO DEI TACCHI A SPILLO

Autore:
Giovanni Filocamo

Copyright © 2010 Kowalski - Apogeo s.r.l.
Socio Unico Giangiacomo Feltrinelli Editore s.r.l.
Via Andegari 6, 20127 Milano (Italy)
Telefono: 02 725721 - Fax: 02 7257200
email: info@kowalskieditore.it - www.kowalski.it

ISBN 978-88-7496-777-3

Progetto della copertina:
segnoruvido.comunicazionivisive

Illustrazioni:
Valentina Mai

Finito di stampare nel mese di marzo 2010
presso Lego S.p.a. - Stabilimento di Lavis (TN)

Dedicato al bambino curioso
che c'è in ognuno di noi

Indice

Curiosa... mente (Introduzione) 11

Capitolo 1 - Sì, viaggiare 15
L'autostrada è sempre un'incognita *17*
Longitudine 23
Marinai con... un teorema in ogni porto 28
Fare i conti senza l'hostess 34

Capitolo 2 - Novanta, la paura! 39
Dadi e monete *41*
Insalata per gli impiegati 47
Non ti pago! Il lotto tra sogno e realtà 52

Capitolo 3 - Non aprite quella porta (logica) 63
Treni di impulsi su numeri binari 65
Tutto il mondo si trasforma in numero 73
iPod e sardine in scatola 77

Capitolo 4 - A me gli occhi, please 85
Telepatia e aritmetica 87
Un nuovo gioco di magia? *91*
Come liberarsi dalle manette 95
Carte... magiche 102

Capitolo 5 - Home sweet home 107
Rigate e rigatoni 109
Giovedì, serata toast! 114
Il caffè esponenziale 119
Una bella interfaccia tosta 124

Capitolo 6 - I love shopping 129
Spesa al supermercato: le somme più veloci del West 131
Calcoli ben saldi 135
7 chili in 7 giorni fa un chilo al giorno? 138
Oddio, non ho niente da mettermi!
Matematica prêt-à-porter 141

Capitolo 7 - Fuga per la vittoria 145
La matematica non è un pignone 147
Zenone in bicicletta 149
Cicloidi e cardioidi: la geometria
che fa bene al cuore 152
A rigor di logica (er teorema der cucchiaio) 159
Abbiamo vinto i mondiali! Ma era matematico? 163

Capitolo 8 - È qui la festa? 169
L'algoritmo dei tacchi a spillo 171
Telefonini intelligenti 175
Happy hour paradosso 178
Paparazzi parabolici 184
Stasera non esco: mi girano le coniche 189
VIP: Very Important Points 194

Capitolo 9 - Matematica? Yes we can! 201
Cocco bello! 203
Proporzionale e maggioritario 207

Appendici 213

I grandi amano le cifre. Quando voi gli parlate di un nuovo amico, mai si interessano alle cose essenziali. Non si domandano mai: "Qual è il tono della sua voce? Quali sono i suoi giochi preferiti? Fa collezione di farfalle?" Ma vi domandano: "Che età ha? Quanti fratelli? Quanto pesa? Quanto guadagna suo padre?" Allora soltanto credono di conoscerlo.

Antoine de Saint-Exupéry,
Il piccolo principe

I box: legenda

Strano ma vero

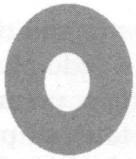
La realtà a volte può riservare sorprese anche nell'esatto mondo del numeri. In questi box troverete notizie curiose, fatti improbabili ed eventi impensabili legati alla matematica. Quando la matematica supera l'immaginazione.

Provaci anche tu!

Alcuni spunti per mettersi alla prova. Semplici calcoli, estensioni dei casi visti nel libro e spunti per riflettere, lavorare o far lavorare. Se siete un po' curiosi, provate a cimentarvi con queste piccole prove. Forse scoprirete di essere anche un po' matematici...

Pazzi, pazzi teoremi

In questi box sono contenuti gli enunciati di alcuni teoremi - alcuni famosi, altri meno noti - legati all'argomento che si sta trattando. Un'ulteriore dimostrazione di come i teoremi, croce e delizia dei matematici, possano avere applicazioni pratiche e a volte insospettabili.



CURIOSA...MENTE (INTRODUZIONE)

Non c'era dubbio, i bagni di matematica erano molto più belli dei nostri.

Il dipartimento di fisica ("a fisica", in gergo), dove seguivo i miei corsi e passavo buona parte delle mie giornate, era stato costruito prima del dipartimento di matematica e la sua architettura, i colori scelti, l'arredamento e l'impostazione generale erano molto più antiquati, oltre a sfoggiare svariati confort in meno.

Per il nostro gruppo di studenti "andare a matematica" era sinonimo di dover espletare un bisogno fisiologico e, quando vedevi qualcuno che andava verso la porta di collegamento verso matematica con un quotidiano o una rivista sottobraccio, non avevi dubbi sullo... studio cui avrebbe bussato.

Per estensione, "andare a matematica" era diventato sinonimo di qualcosa di quasi dispregiativo. Non credo che fosse per rivalità, competizione o, ancor peggio, astio. Come molti sanno, i fisici usano la matematica a mani basse e spesso il fatto di riuscire a raggiungere un certo risultato

dipende da quanta matematica è stata sviluppata in quel particolare ambito. Credo piuttosto che quando qualcuno è inserito in un gruppo, un ordine o una conventicola di qualunque natura, il fatto di prendere un po' in giro i "vicini di casa" (a livello ideale) rafforzi in qualche modo la propria posizione. E così i fisici prendono in giro gli ingegneri, gli italiani i francesi, i francesi gli italiani e così via.

I miei primi contatti con la matematica, e soprattutto con i matematici, furono fortuiti e occasionali; tuttavia quell'universo mi affascinava. Nel corso dei miei studi, piano piano mi appassionai a quel mondo fatto di idee, di modelli, di strutture e sovrastrutture che governavano le strutture sottostanti, di spazi immaginari multidimensionali dove vivevano strani animali dai nomi ancor più strani. E così cambiai il mio indirizzo di specializzazione da "elettronico-cibernetico" a "fisico teorico". In questo modo riuscii a inserire molti più esami vicini alla matematica e addirittura qualcuno di matematica pura. A poco a poco mi affezionai a una pratica conoscitiva fatta sempre meno di esperienze in laboratorio e sempre più di libri da conquistare, autori da scoprire, idee da "sgomitolare" e mondi interi che si schiudevano dopo una chiacchierata alle macchinette del caffè.

Io non sono un matematico anche se, a causa del mio lavoro, molti lo pensano; ma credo di avere acquisito molto dello spirito di chi fa matematica a livello professionale: sono costantemente a contatto con loro, con matematici amatoriali, con ludologi, con appassionati enigmisti, scacchisti, ricercatori e così via. Ho studiato molta matematica nel mio percorso, molta altra mi rimane da scoprire e così, in quei delicati e impalpabili frangenti in cui la vita moderna ci permette di dedicarci a ciò che davvero ci interessa, e di farlo con calma, mi dedico a leggere, approfondire, studiare e soprattutto riempire di domande amici, colleghi e matematici. Ho imparato così che la matematica sviluppa

la pazienza, in quanto tutti loro mi sopportano di buon grado (almeno lo spero!) e spesso sono incuriositi dalle mie domande. Sono interessati da come vengono viste le cose da uno come me, con una formazione "attigua", possiamo dire, con un buon grado di approfondimento, con l'abitudine a proporsi e risolvere problemi, con lo spirito di osservazione di un vero curioso, con la mania di trovare strutture, ordine e metodo nella vita quotidiana; spesso mi dicono che ho intuizioni geniali ma che mi mancano alcune basi teoriche in cui inquadrare determinate idee. Sono momenti esaltanti, divertenti, stimolanti, sono davvero i momenti in cui il mio cervello si sveglia. Non si parla quasi mai di numeri.

Una qualità che tutte queste persone hanno è proprio la curiosità. Cercando questa parola nel dizionario, si trova che un curioso è colui che è desideroso di sapere, di conoscere, di istruirsi; io credo che il curioso oggi sia anche colui che ha bisogno di sapere come e perché funzionano le cose, quali strutture matematiche, teoriche, filosofiche, logiche e quali modelli concettuali sia possibile applicare per risolvere un problema, quali sono i motivi per cui qualcosa accade, in che modo e quanto la scienza e la matematica possono rispondere a queste domande. In questo senso, mi sento molto legato ai matematici e al tempo stesso a una serie di persone che pensano di non sapere la matematica, di non capirci niente, ma che la usano inconsapevolmente, magari nel loro lavoro, e che non sanno di amarla.

Nel tentativo di comunicare le mie idee in maniera efficace, proverò a ricalcare le orme di una famosa azienda che vende prodotti e servizi di telefonia. Sembra che le multinazionali spendano moltissimo denaro per il marketing, per progettare le loro campagne pubblicitarie, per individuare e strapagare i testimonial e per ideare i propri slogan. Uno di questi, ormai celeberrimo, recita: "It's all around you", intendendo le onde elettromagnetiche a

cavallo delle quali viaggiano le comunicazioni via telefono cellulare. Quando rifletto, quando accendo la mia sensibilità creativa, vedo davvero la matematica tutta intorno a me: mentre vado a lavorare, quando cucino, mentre mi danno il resto al bar, quando guardo il cielo, quando mi allaccio una scarpa. E mi emoziono sempre.

Recentemente uno slogan della stessa azienda, in relazione a una specifica campagna per reclamizzare l'ultima convenientissima offerta, recitava: "Se vuoi puoi!"

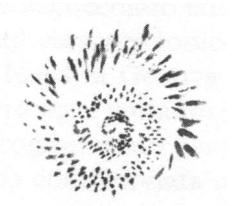
Con il desiderio che, assieme ai divulgatori, i ricercatori, i pensatori, i filosofi e i matematici curiosi di tutto il mondo, si riesca a diffondere l'idea del "volere è potere", rivolta alla matematica, e con la speranza che questo contribuisca a migliorare la qualità della vita di tutti noi, vi auguro una buona lettura di questi appunti-spunti di matematica.

E di curiosità.

1

SÌ, VIAGGIARE...

MICHAEL SCHUMACHER, CRISTOFORO COLOMBO E IL BARONE ROSSO



1

Non posso far piovere! Posso sfruttare
il vento, ma non sono il suo artefice!
Jack Aubrey in
Master and Commander

L'autostrada è sempre un'incognita

A volte mi viene voglia di partire.

Non parlo del solito viaggio ai Caraibi, della voglia di staccare dal lavoro o della necessità quasi fisiologica di immergere il mio corpo dentro acqua salata a 25 °C, ma di partire in automobile, e di notte. Di questo desiderio viscerale credo che il maggiore responsabile sia mio padre: senza dubbio è qualcosa che ho ereditato. Anche lui spesso viene assalito dalla stessa voglia, la cui radice penso affondi nei nostri ricordi.

I miei genitori sono originari dell'Italia del Sud e sono ancora molto legati al loro paese d'origine, Roccella Jonica, borgo di 7.000 anime accoccolato sul mare 80 km a nord di Reggio Calabria, sul versante ionico, appunto. Essendo venuti ad abitare al Nord, a Genova dove viviamo tuttora, tornare al paese era ogni volta un viaggio, ma di quelli seri! Spesso veniva programmato per la notte, in modo da stare più freschi (l'aria condizionata non era così diffusa),

incontrando meno traffico e meno code al casello. Prima della partenza immaginavo sempre che, se gli altri avessero pensato come il nostro guidatore, ci saremmo trovati tutti insieme in autostrada, in un ingorgo mostruoso e per di più di notte! Ma non succedeva mai; mio padre aveva ragione, e un po' mi dispiaceva che la mia teoria non si trasformasse in pratica.

Così, al tramonto, partivamo per i nostri viaggi interminabili, fendendo la densa notte come frecce di metallo; avevo una vera e propria missione: tenere compagnia a mio padre per non fargli venire sonno, tenerlo vigile e attento ma, al tempo stesso, rilassato. Inutile dire che allora non ero abituato a stare sveglio di notte, quindi facevo molta più fatica di mio padre. Però l'atmosfera era magica, quasi onirica. La strada correva veloce, il buio avvolgeva tutto, si potevano scorgere a malapena i contorni degli alberi, delle case e delle colline illuminate dalla luce della luna. Un momento meraviglioso per far correre la mente a ruota libera.

Mi divertivo a guardare continuamente il tachimetro e il contachilometri.

Come sapete, l'uno ci dice quale è la velocità a cui stiamo viaggiando e l'altro quanto spazio abbiamo percorso da quando l'automobile è uscita dalla fabbrica (totale) e quanto ne abbiamo percorso da quando abbiamo resettato lo "zero" (parziale). Mio padre parlava spesso di "velocità media", di mantenere una "buona media" oppure di "andare alla media dei 100", intendendo 100 chilometri l'ora. Cercavo di capire che cosa significassero quei termini e cominciai così ad addentrarmi nel meraviglioso mondo della meccanica, uno dei campi più importanti della fisica-matematica.

L'autostrada è uno degli scenari più insospettabili per fare un po' di matematica: nasconde curiosità interessanti e offre la possibilità di impostare problemi stuzzicanti.

Generalmente, quando si intraprende un lungo viaggio in automobile, si tende a resettare a zero il contachilometri in modo tale da vedere quanta strada si è percorsa. Se qualche tempo fa era un modo di ottenere l'informazione sullo spazio percorso, con l'avvento di internet, delle guide e delle mappe online, questo non è più necessario; però qualcuno lo fa lo stesso anche per... controllare se il tale sito o la mappa interattiva hanno davvero ragione. Giunti alla meta, una delle operazioni più intuitive e naturali che si possono compiere è esaminare quanta strada si è appena percorsa (ma solo dopo essere scesi dall'automobile ed essersi stiracchiati per bene, si intende), prendere il tempo che abbiamo impiegato ed eseguire un rapporto strada fatta/tempo impiegato. Il risultato sarà un numero che ci indicherà una velocità; per convincerci fino in fondo di ciò basta considerare che stiamo dividendo uno spazio (misurato in chilometri) per un tempo (in ore); quel che ne che risulta è misurato in chilometri orari, proprio l'unità di misura della velocità. Ma quale velocità viene fuori? Che significato ha questo numero?

Facciamo un esempio pratico e verosimile: per andare in Calabria con la mia famiglia, i chilometri percorsi erano pressappoco 1.300 e il tempo impiegato circa 14 ore. Eseguendo la divisione 1.300/14, il risultato è circa 93 chilometri l'ora; significa che 93 km/h sarebbe la velocità che avremmo dovuto mantenere ininterrottamente per 14 ore per 1.300 km. Ovviamente, quando si fa un viaggio in autostrada non è pensabile andare sempre alla stessa velocità: ci sono curve, rettilinei dove accelerare, ma soprattutto soste da fare, carburante da mettere nel serbatoio, pedaggi da pagare e traffico nel quale districarsi.

La velocità che risulta dalla nostra semplice divisione si chiama velocità media: la possiamo immaginare come un messaggero che ci riporta un dato sintetico e rilevante. Per esempio, ci indica quanto tempo abbiamo perso in totale

per le soste. Se infatti abbiamo mantenuto una velocità costante di - supponiamo - circa 120 km/h e la media risulterà di 90 km/h, vuol dire che abbiamo dedicato parecchio tempo alle soste. Per vedere quanto, è necessario sapere quanto è durato il viaggio.

Un altro caso in cui si deve prestare attenzione alle media è quando si vuole fare un calcolo su due tipologie di strada. Supponiamo di dover percorrere 240 km in autostrada e poi di affrontare ben 210 km su strade statali. Ipotizziamo che la velocità media per l'autostrada sia 120 km/h e 60 km/h per il resto del tragitto. Allora, per stimare il tempo totale di percorrenza, potrebbe venirci in mente di calcolare il tempo totale; saremmo portati a operare la media delle velocità, e quindi:

$$V_m = \frac{120 + 60}{2} = 90$$

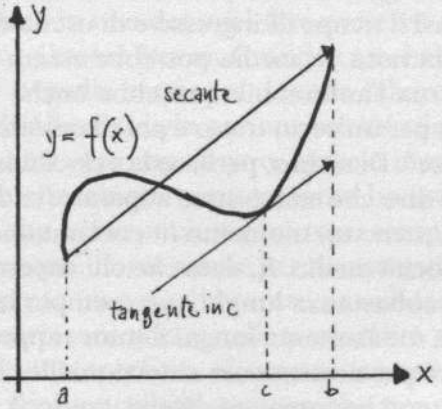
Ottenendo così 90 km/h. Ora potremmo considerare lo spazio totale da percorre, che è 240+210=450 km, e affermare che, andando a 90 km/h, in 5 ore avremo percorso la strada. Dicevo che bisogna fare molta attenzione perché questo ragionamento è sbagliato. Infatti la velocità media calcolata come abbiamo fatto poco fa ha senso solo se l'auto fosse andata a 120 km/h e a 60 km/h per lo stesso lasso di tempo. Ma nessuno ce lo assicura, anzi vediamo come vanno davvero le cose.

Per il primo tragitto, quello autostradale, ci sono 240 km da compiere a 120 km/h, per il quale saranno necessarie 2 ore. Per il secondo ci sono 210 km da coprire a 60 km/h: per questo servono 3,5 ore. Facendo la somma dei tempi parziali, otteniamo 5,5 ore e non 5. Se volessimo sapere qual è realmente la velocità media, dovremmo allora prendere il tragitto totale di 450 km e dividerlo per il tempo totale di 5,5 ore ottenendo circa 81,9 km/h.

Pazzi, pazzi teoremi

Il teorema di Lagrange

Supponiamo che una funzione rappresenti l'andamento della velocità di un'automobile sull'autostrada, come nell'immagine sotto. Nell'ipotesi in cui sia sufficientemente "liscia", cioè tale che sia continua e ogni suo punto abbia una tangente, tracciando il segmento che unisce gli estremi di f(x) nell'intervallo considerato, essa intersecherà f(x) almeno in due punti. Ora, se spostiamo idealmente questa retta verso il basso, sempre mantenendola parallela con la stessa pendenza, notiamo che essa andrà a coincidere con la retta tangente alla curva nel punto di ascissa c. Il teorema di Lagrange afferma che, sotto le ipotesi di regolarità di sopra, esiste sempre un punto c, come nell'esempio, tale che la tangente in quel punto ha la stessa pendenza del segmento congiungente i punti estremi del grafico. In altre parole, durante l'andamento dell'automobile in autostrada ci sarà di sicuro un momento in cui l'automobile andrà alla sua velocità media.



I sistemi di controllo della velocità in autostrada sono da sempre una croce per gli automobilisti italiani. La sicurezza stradale è un argomento davvero importante e purtroppo ancora oggi, con i mezzi di cui disponiamo, si verificano

tanti incidenti dovuti, per un'alta percentuale, alla velocità troppo elevata. Nei viaggi che facevo con la mia famiglia (e in quelli che faccio anche adesso) mi sono spesso chiesto come facessero i sistemi a determinare la velocità con accuratezza.

Dopo i famosi autovelox, sono stati introdotti altri sistemi che si chiamano "tutor". Entrambi usano il teorema della media ma, mentre possiamo pensare che l'autovelox calcoli la velocità istantanea, il tutor calcola quella media su un tragitto abbastanza breve. Entrambi, in realtà, registrano quanto tempo trascorre dal passaggio in un punto a un altro della strada e poi operano semplicemente la divisione spazio/tempo che restituisce la velocità. Certo che più l'intervallo di tempo è breve e più l'informazione trovata sarà vicina alla velocità istantanea; infatti l'autovelox funziona proprio così, cioè riducendo moltissimo l'intervallo; il tutor, invece, si prefigge un obiettivo diverso. Infatti se per esempio prendessi il tempo di ingresso e di uscita da una galleria di lunghezza nota, la media potrebbe essere sotto il limite di velocità ma l'automobile potrebbe anche essere andata velocissima per un certo tratto e poi pianissimo alla fine per "compensare". Di sicuro, però, se la velocità media è oltre il limite, vuol dire che esso è stato superato: ci deve quindi essere stato almeno un momento in cui l'automobile è andata alla sua velocità media. E, dato che chi supera il limite lo fa per tragitti abbastanza lunghi, per esempio la lunghezza di una galleria mediamente lunga, il tutor rappresenta un metodo efficace per determinare situazioni illecite.

I due sistemi hanno scopi diversi, credo. A volte può succedere di superare il limite per un breve tratto, magari per affrettarci a compiere un sorpasso, e se proprio in quel momento ci fosse un autovelox prenderemmo la multa. Ma se invece c'è un sistema tutor che guarda la nostra media su un tragitto più lungo non succederà, sempre che dopo il sorpasso torniamo entro i limiti.

Due sistemi di controllo, quindi, che hanno obiettivi diversi ma il cui funzionamento si basa sullo stesso teorema. Nel buio dei miei viaggi notturni non lo avrei mai immaginato, ma la palestra fatta in quegli anni di "innocenza matematica" mi ha sicuramente aiutato a viaggiare fra i numeri negli anni a venire.

Longitudine

C'è una frase attribuita a Cristoforo Colombo - un personaggio che amo ricordare anche perché la sua casa a Genova è a circa 3 minuti a piedi dalla mia - che recita:

E il mare concederà a ogni uomo nuove speranze, come il sonno porta i sogni.

È anche citata in uno dei miei film preferiti da ragazzo, ovvero Caccia a Ottobre Rosso. Grande cast, bel ritmo, storia intrigante e quella sequenza dove la telecamera parte dalla pistola di Alex Baldwin per aprirsi sui silos che ospitano i missili è un vero capolavoro. Mare e immersioni mi hanno sempre affascinato: praticamente ho imparato prima a nuotare che a camminare e mi sono sempre sentito a mio agio nell'acqua. Forse anche per dare seguito a questo richiamo, ho preso un paio di brevetti da subacqueo e ogni tanto vado a curiosare anche nelle profondità marine. Ma pur rimanendo in superficie, ci sono alcune sfiziosità matematiche da sbocconcellare, sempre che non soffriate di mal di mare!
Nella storia della navigazione, ci sono stati pochi - ma molto ben posti - problemi che è stato necessario risolvere, anche grazie alla matematica; per esempio, capire dove ci si trovi in un dato momento, come decidere dove andare e come disegnare carte che possano essere utili ad altri naviganti

Tutti sappiamo che gli antichi navigatori riuscivano a ricavare la loro posizione grazie alle stelle. Cominciamo allora da un problema basilare: siamo in mezzo al mare (senza GPS, of course); come sapere dove ci troviamo?

A questo quesito il marinaio dei tempi di Newton sapeva rispondere solo in parte, grazie ad alcune semplici rilevazioni con il naso in su: l'altezza di alcune stelle note, di riferimento rispetto all'orizzonte, la durata del giorno, l'altezza del Sole; in sintesi, poteva dire grazie all'osservazione del cielo a quale latitudine (cioè su quale parallelo) si trovava.

Per intenderci, i paralleli sono le fette di Terra "in orizzontale". Quelli più famosi sono l'equatore e i due tropici, del Cancro e del Capricorno.

Come è facile capire, questo non bastava per determinare la posizione. È come se, in coordinate cartesiane, conoscessimo la lunghezza di un oggetto ma non sapessimo nulla della sua larghezza. Poco utile. Perfino Colombo, nel suo storico viaggio, scelse di viaggiare a cavallo di un parallelo per non perdersi.

Ricordiamoci anche che a quei tempi le navi erano mosse dalla sola forza del vento, il quale in genere non spira come vogliamo noi, ma come vuole lui. Perciò a volte può essere produttivo mettere il vento in poppa e riceverlo ortogonale alle vele, per filare via sull'acqua più velocemente. Ma bisogna anche sapere dove si sta andando, dove si arriva dopo un certo tempo: lo si può ottenere dalla cartografia e dalla precisione; soprattutto è necessario poter controllare se si è davvero dove si pensa di essere, oppure no. E così nacque il problema di come conoscere la longitudine di un battello in mezzo al mare.

Le stelle non potevano aiutare molto e anche i capitani più famosi fecero qualche bel crash contro gli scogli, oppure contro la propria meta, se raggiunta prematuramente rispetto ai piani.

Strano ma vero

Misura della velocità in nodi

L'unità di misura della velocità usata ancora oggi in ambito aeronautico è il nodo, il quale è definito come un miglio nautico internazionale (1852 m) l'ora, ovvero quasi 2 km/h.

È interessante mettere il naso nell'origine di questo nome. Per misurare la velocità di una nave, veniva lanciata in mare da poppa una cordicella cui era legato un travetto di legno con funzione di galleggiante; lungo la corda erano stati fatti alcuni nodi a cadenza costante di 50 piedi e 2,5 pollici (15,433 m). Il calcolo della velocità veniva effettuato da due marinai: uno doveva lanciare la cordicella e contare quanti nodi attraversavano le sue dita, mentre un altro teneva il tempo usando una clessidra da 30 secondi. Dato che 15,433 m sono 1/120 di miglio marino, mentre 30 secondi sono 1/120 di ora, il conteggio dei nodi passati tra le dita del marinaio in 30 secondi corrispondeva alla velocità della nave.

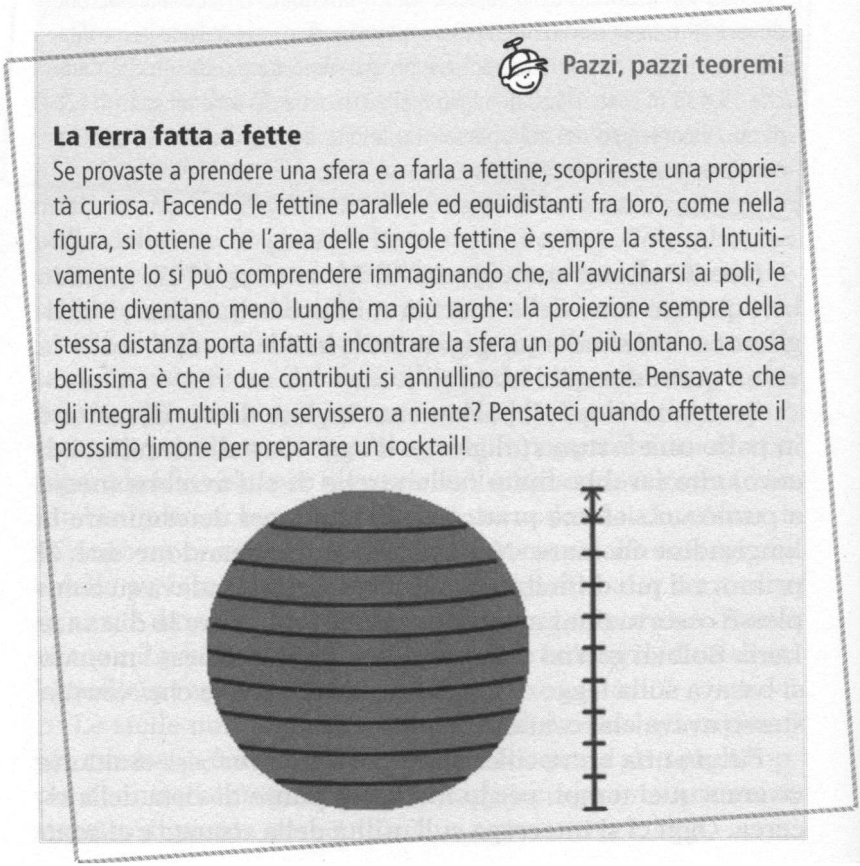
Questa situazione culminò il 22 ottobre 1707, quando ben quattro navi della marina militare britannica si incagliarono causando un gigantesco incidente che costò la vita a quasi duemila uomini.

Sette anni dopo, il parlamento inglese decise di mettere in palio una fortuna (al giorno d'oggi circa dieci milioni di euro) che sarebbe finita nelle tasche di chi avrebbe messo a punto un sistema pratico e affidabile per determinare la longitudine in mare. Newton rispose indicandone due. Il primo, e il più difficilmente applicabile, si fondava su complesse osservazioni astronomiche per misurare le distanze Luna-Sole di giorno e Luna-stelle di notte. Questo metodo si basava sulla legge di gravitazione universale che Newton stesso aveva elaborato.

Faccio una breve riflessione circa quanto fosse esaltante vivere a quei tempi, per lo meno dal punto di vista della ricerca. Oggi ci si interroga sull'utilità della scienza e ci sono

dubbi e contrasti sulle direzioni in cui procedere e sull'opportunità di proseguire in determinati campi della ricerca. A quell'epoca, Newton aveva scoperto come si muovono i corpi celesti attraverso l'osservazione e utilizzando gli strumenti matematici più avanzati del momento, elaborati da lui stesso; e poi applicava le sue teorie a problemi pratici, come determinare la posizione di un battello in mare. Eccezionale.

Torniamo a noi: ci interessa soprattutto il secondo metodo.


Pazzi, pazzi teoremi
La Terra fatta a fette
Se provaste a prendere una sfera e a farla a fettine, scoprireste una proprietà curiosa. Facendo le fettine parallele ed equidistanti fra loro, come nella figura, si ottiene che l'area delle singole fettine è sempre la stessa. Intuitivamente lo si può comprendere immaginando che, all'avvicinarsi ai poli, le fettine diventano meno lunghe ma più larghe: la proiezione sempre della stessa distanza porta infatti a incontrare la sfera un po' più lontano. La cosa bellissima è che i due contributi si annullino precisamente. Pensavate che gli integrali multipli non servissero a niente? Pensateci quando affetterete il prossimo limone per preparare un cocktail!

Conoscendo a bordo della nave l'ora esatta del porto di partenza (Londra in questo caso) e confrontandola con quella locale, rilevabile dall'altezza del sole, è possibile risalire al fuso orario esatto e dunque sapere la differenza di longitudine tra Londra e la posizione della nave. Sappiamo che, se in un punto della Terra è mezzogiorno, nel punto opposto (quello antipodale) sarà mezzanotte. Di conseguenza, da un punto a quello antipodale ci saranno 12 ore di differenza di fuso orario (infatti un giorno è fatto di 24 ore, che corrispondono a un giro completo della Terra). Quindi possiamo dire che la lunghezza dell'arco che copre metà Terra è in corrispondenza di 12 ore. L'arco corrispondente a metà circonferenza sarà la lunghezza delle circonferenza divisa per 2, ovvero πR, dove R è il raggio della Terra, noto fin dai tempi degli antichi Greci. Possiamo impostare quindi una proporzione per calcolare l'errore di misurazione su un tempo noto, che chiamiamo per ora t.

$$12 \text{ ore: } \pi R = t : x$$

Portando tutto in minuti ed eseguendo le semplificazioni troviamo che

$$x = \frac{\pi R}{720} t \cong 27{,}7$$

Quindi, inserendo uno scarto, per esempio, di 4 minuti, l'errore commesso sarebbe di ben 111 km, ovvero 60 miglia marine. E, per gli orologi del tempo, sbagliare di 4 minuti a bordo di una nave era all'ordine del giorno per ragioni tecniche: il beccheggio e il rollio, gli sbalzi termici, le condizioni gravitazionali e altri fattori. Il metodo, seppur ingegnoso, era dunque inapplicabile.

Nel 1773, l'inglese John Harrison, orologiaio autodidatta, dopo oltre quarant'anni di lavoro presentò un orologio che rispondeva alle richieste della commissione.

Strano ma vero

Un miglio marino

Qualcuno può essersi chiesto da dove sia saltato fuori il miglio marino. Non si poteva usare il chilometro e non complicarsi la vita? Forse sì, ma la misura del miglio marino (1852 m) deriva dal fatto che questa è la lunghezza dell'arco di circonferenza massima (equatore o meridiano sulla sfera terrestre) sotteso da un angolo al centro della Terra di ampiezza pari a 1 primo (cioè 1/60 di grado).

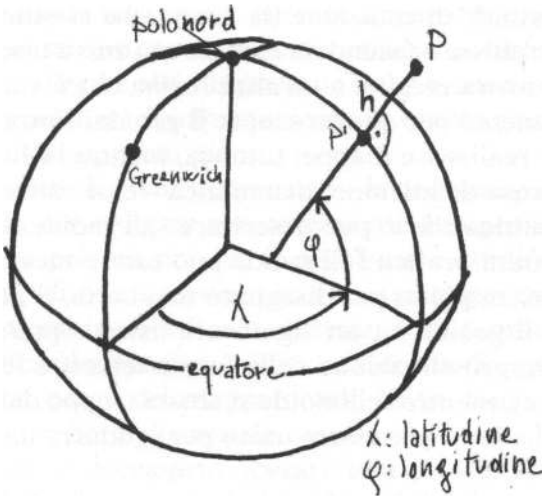
Marinai con un... teorema in ogni porto

Abbiamo appena visto come latitudine e longitudine si materializzino nella pratica; ovviamente alle spalle di tutto ciò c'è una solida teoria.

Per determinare le coordinate di un punto su una superficie, è comodo usare coordinate che tengano conto di come è fatta questa superficie; è sempre meglio che intestardirsi a usare sempre le coordinate cartesiane (cioè l'equivalente di "lunghezza" e "larghezza"). Queste coordinate, per quanto siano le più intuitive, non sono affatto le uniche.

Il caso che abbiamo più sotto il naso è quello rappresentato da latitudine e longitudine terrestre, cioè coordinate di tipo sferico. Questo significa che per misurare una posizione, anziché usare un metro, dovremmo servirci di un "angolometro".

Già, perché latitudine e longitudine sono angoli. Per l'esattezza sono gli angoli sotto cui è visto un punto su una superficie sferica (vedi la figura nella pagina a lato) partendo da un meridiano e un parallelo di riferimento che sono stati fissati, rispettivamente, nel meridiano di Greenwich e nell'equatore.



E non sono le uniche coordinate! Ce ne sono di molti tipi: cilindriche, ellittiche, paraboliche, generalizzate, curvilinee, oltre ovviamente a quelle... bancarie. Ognuna di queste serve per un particolare scopo e, dato che la Terra è approssimabile a una sfera, almeno per alcune applicazioni, è possibile usare le coordinate sferiche.

Un interessante problema cui si pensa ogni volta che si sale su un'imbarcazione è come disegnare una carta affidabile e utile alla navigazione. È una questione con la quale hanno dovuto fare i conti naviganti e avventurieri di tutti i tempi, anche se a volte inconsapevolmente. Come sappiamo oggi, il pianeta su cui viviamo non è piatto: ha una forma sferica, anche se non è proprio regolare. Se lo fosse, sarebbe perfettamente liscia e ogni punto della sua superficie dovrebbe trovarsi esattamente alla stessa distanza dal centro.

È facile accorgersi che non è così: sulla Terra ci sono montagne e colline, valli e burroni. A causa della rotazione terrestre e di altri fattori, la Terra è approssimabile meglio

a un ellissoide di rotazione (la forma che si ottiene prendendo un'ellisse e facendola ruotare attorno a uno dei suoi assi) o, ancora meglio, a un'altra forma che è stata creata appositamente per questo scopo: il geoide. Entrambe servono per realizzare mappe; tuttavia, mentre l'ellissoide ha una rigorosa definizione matematica - cioè esiste una formula analitica che lo può descrivere -, il geoide no.

In termini pratici, l'ellissoide può essere messo in relazione con un piano per disegnare una carta, il geoide no. Ma solo il geoide ha un significato fisico e può considerarsi un'approssimazione della forma terrestre (eccetto le montagne), mentre l'ellissoide si scosta troppo dalla forma reale della Terra per essere usato per produrre una mappa precisa.

E poi, che cosa significa produrre una carta precisa? E soprattutto come possiamo riprodurre una superficie simile a una sfera nello spazio su una carta, che "vive" sul piano? Sarebbe come rompere un lampadario fatto a palla e pretendere che i pezzetti di vetro che ci troviamo tra le mani aderiscano perfettamente al pavimento. Per i pezzi più piccoli potremmo avere questa illusione, per quelli più grandi no. Ci sono errori e deviazioni che, in piccole porzioni di spazio, possono essere trascurate; ma quando si traccia una rotta lunga decine di migliaia di chilometri (come nei viaggi intercontinentali) no. Il raggio del campo topografico - vale a dire quella porzione della superficie terrestre entro cui l'errore di sfericità può essere considerato trascurabile ai fini planimetrici - si può estendere sino a 10 km circa quando si proceda a misure di distanza con precisione 1/1.000.000 (un millimetro su un chilometro).

Nella grande maggioranza dei rilievi di estensione limitata è sufficiente la precisione di 1:200.000, dunque il raggio del campo topografico arriva fino a circa 25 km. Nel caso in cui si proceda al rilievo delle quote, il campo topografico si riduce a poche centinaia di metri.

Nasce allora una vera e propria scienza, la cartografia, che mette assieme conoscenze matematiche, tecniche e artistiche finalizzate alla rappresentazione veritiera (e vedremo cosa vuol dire) di informazioni - in questo caso geografiche - su un supporto piano.

Dal punto di vista matematico, la tecnica geometrica necessaria per svolgere questo compito è la geometria; in termini un po' più precisi, il problema è come fare una proiezione di punti espressi in coordinate geografiche in punti espressi in coordinate cartesiane. In termini pratici e semplificando, possiamo dire che si tratta di capire come portare un pezzo del mappamondo su un foglio di carta per giocare a battaglia navale.

Per farlo è necessario operare una proiezione di tutti i punti della sfera su un piano. Come? Ovviamente come viene più comodo per il fine che vogliamo perseguire. Qual è questo fine? Per esempio, tracciare una rotta su una carta come una linea retta.

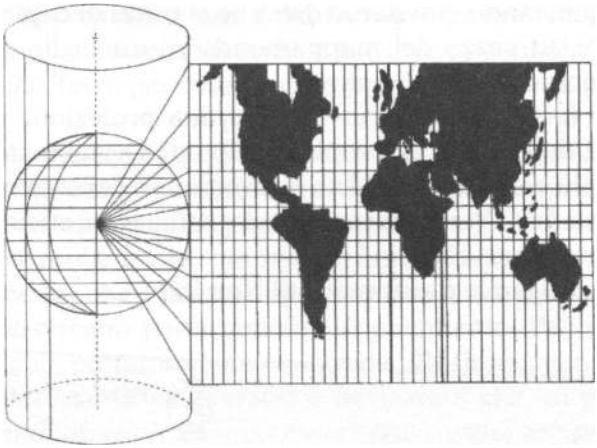
Vi pare facile e automatico? Non lo è.

Pazzi, pazzi teoremi

Questo teorema è un punto fisso

I teoremi di punto fisso sono fra i più importanti in matematica. Stabiliscono che in una determinata trasformazione ci sono alcuni punti che, in qualche modo, rimangono fermi dove si trovavano. Anche per le mappe, ne troviamo uno molto interessante: il teorema di Brouwer. Esso stabilisce che, prendendo due fogli di carta identici e stropicciandone uno, ci sarà almeno un punto che è rimasto nella stessa identica posizione di prima. Quindi, mettendo il foglio spiegazzato sopra quello aperto, ci saranno due punti che si corrispondono. Un altro esempio? Buttando a terra una mappa del luogo dove ci si trova, ci sarà sempre un punto della mappa che corrisponde esattamente al punto in cui è appoggiata.

Non è banale il problema di svolgere (nel senso contrario di avvolgere) una superficie sferica su un piano. Si può farlo in diverse maniere, ma la più riuscita e usata proviene dalla mano sapiente di un geografo e cartografo fiammingo, Gerard de Cremer, noto come Gerardus Mercator (italianizzato in Gerardo Mercatore, 1512-1594). Quella di Mercatore è una proiezione cartografica conforme e cilindrica. Possiamo vedere come si costruisce guardando questa figura.



Come tutti i modelli matematici, questo modo di raccogliere la luce che abbiamo immaginato provenire dal centro della Terra ha pregi e difetti, ma è stato molto usato perché il numero dei primi metteva in ombra i difetti.

Il pregio maggiore è che la mappa rappresenta linee di costante angolo di rotta come segmenti di una retta. Questo aiuta molto la nostra intuizione, ma nella realtà le cose non stanno così, e lo vedremo tra un attimo.

L'altra proprietà di questa proiezione è la conformità. Essere una proiezione conforme si traduce nel fatto che la scala delle distanze è costante in ogni direzione attorno

a ogni punto, conservando quindi gli angoli e le forme di piccoli oggetti.

Il difetto più grande, invece, è che la proiezione di Mercatore distorce sempre più la dimensione e le forme degli oggetti estesi mano a mano che ci si avvicina ai poli, in corrispondenza dei quali la scala della mappa aumenta a valori infiniti. Già vicino ai poli le aree sono molto distorte: la Groenlandia, per esempio, risulta avere una superficie quasi pari a quella dell'Africa, che in realtà è 14 volte più grande. L'area dell'Alaska, poi, sembra superiore a quella del Brasile; eppure questo Stato ha una superficie oltre 5 volte più estesa di quella dell'Alaska. La Finlandia, infine, è rappresentata come se avesse un'estensione nord-sud più pronunciata di quella dell'India, mentre in realtà è il contrario. A causa di questi difetti, in certi contesti si preferisce usare altri tipi di proiezione. Negli atlanti, per esempio, viene usata la proiezione sinusoidale, che mantiene fedele l'estensione delle aree.

La sinusoide è la forma matematica che, come il nome stesso sinuosamente suggerisce, serpeggia disegnando uno zig-zag. È questo il motivo per cui a volte si vedono le mappe terrestri come un serpente allungato.

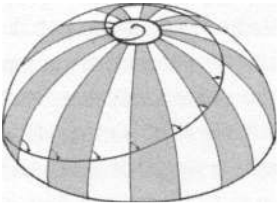
Mercatore interattivo

Google Maps, il famoso sistema di mappatura del nostro pianeta edito dalla "Big G" di Google, attualmente usa una proiezione di Mercatore per le sue immagini. Infatti, nonostante la sua distorsione di scala relativa, si adatta bene per una mappa del mondo che può essere "navigata" in modo intuitivo e interattivo dato che può essere spostata e "zoomata" senza cuciture di giunzione da una mappa locale all'altra mappe locali. La massima latitudine di Google Maps, comunque, si raggiunge a ±85,05113 gradi.

Fare i conti senza l'hostess

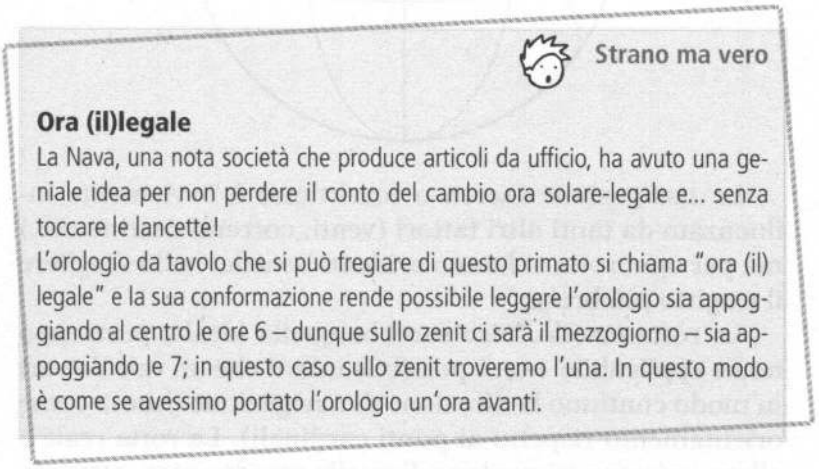
Una storiella che si racconta in ogni angolo d'Italia ha per protagonista il beone locale: una sera, tornando a casa molto più ubriaco del solito, smarrisce la strada. Dopo lunghi minuti spesi a ritrovarla, si siede esausto sul marciapiede esclamando: "Se è vero che la Terra gira, prima o poi casa mia deve passare da qui!" La proprietà di tentare di mantenere una linea retta, tanto ricercata da chiunque alzi troppo il gomito, è in realtà ambita anche da chi traccia una rotta. Infatti vorremmo anche che una rotta eseguita mantenendo sempre lo stesso angolo fosse una linea retta sulla carta. Questa proprietà si chiama lossodromia.

Tutti noi, quando siamo a bordo di una nave o un aereo, abbiamo l'impressione di andare in linea retta; non è così. Ci sono alcune traiettorie preferenziali che i piloti utilizzano e che si determinano grazie ad accorgimenti di tipo matematico. Un oggetto qualsiasi che si muove sulla superficie terrestre o nell'atmosfera seguendo una direzione retta apparente, cioè tagliando tutti i meridiani con lo stesso angolo, in realtà, a causa della sfericità terrestre, percorre questa curva di lossodromia. Come al solito, quando si ha a che fare con brevi distanze, questo effetto non si avverte; ma quando queste uniscono magari due capi della Terra, è bene tenerne conto. Se ci incamminassimo seguendo le indicazioni di una bussola e cominciassimo ad andare, supponiamo, a nord-est, non percorreremmo una retta, bensì una spirale logaritmica.



Le carte in cui la navigazione lossodromica viene rappresentata come una retta hanno ovviamente il rovescio della medaglia: le linee che sono davvero rette non potranno essere rappresentate sulla carta come tali. Questo avviene, per esempio, quando si voglia segnare il percorso di un'onda elettromagnetica, nel caso in cui si possa rappresentare come un raggio e quindi nell'approssimazione dell'ottica geometrica, per esempio emessa da una sorgente come un radiofaro.

Se, programmando il nostro viaggio, immaginassimo di voler congiungere due punti, che è poi quello che si fa quando si traccia una rotta con un punto di partenza e uno di arrivo, allora procedendo come abbiamo detto sopra, cioè diritti verso il punto di arrivo, non staremmo percorrendo il tragitto più breve. Questa proprietà è peculiare a un'altra curva che è l'ortodromia.



Strano ma vero

Ora (il)legale

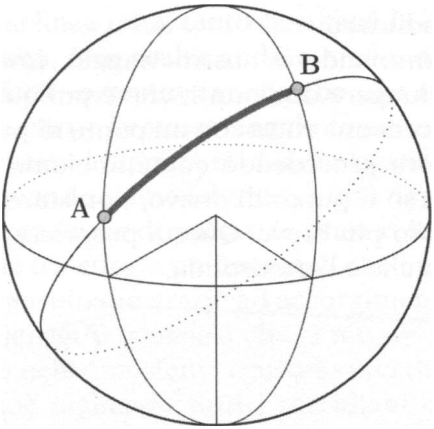
La Nava, una nota società che produce articoli da ufficio, ha avuto una geniale idea per non perdere il conto del cambio ora solare-legale e... senza toccare le lancette!

L'orologio da tavolo che si può fregiare di questo primato si chiama "ora (il) legale" e la sua conformazione rende possibile leggere l'orologio sia appoggiando al centro le ore 6 – dunque sullo zenit ci sarà il mezzogiorno – sia appoggiando le 7; in questo caso sullo zenit troveremo l'una. In questo modo è come se avessimo portato l'orologio un'ora avanti.

Dati due punti sulla superficie terrestre, è possibile determinare il piano che li contiene entrambi e che contiene anche il centro della Terra. Per farlo si può direttamente considerare il piano che i tre punti determinano senza ambiguità, oppure considerare il cerchio che passa dai due

punti sulla superficie e poi costruire il piano che contenga questo cerchio. L'intersezione tra la superficie terrestre e tale piano è una curva che si chiama ortodromia.

La sua caratteristica è di essere il più corto tragitto tra due punti sulla circonferenza. Inoltre questa circonferenza taglierà tutti i meridiani con angoli diversi, lungo un cerchio massimo.



La navigazione (aerea o marittima) è ovviamente influenzata da tanti altri fattori (venti, correnti marine ecc.) ma per ogni rotta si hanno evidenti benefici nello scegliere il tragitto più breve.

La rotta ortodromica sarebbe quella ideale; purtroppo non è applicabile: non è possibile infatti che un veicolo vari in modo continuo la direzione di navigazione (intesa come orientamento rispetto ai punti cardinali). La rotta reale è allora un'approssimazione di quella ortodromica, ottenuta attraverso l'unione di successive rotte lossodromiche parziali.

Quindi, se neppure navi e aerei moderni riescono ad andare diritti, per quale motivo ci dovrebbe riuscire chi ha alzato il gomito una sera?

Provaci anche tu

La traversata dell'Atlantico

Una società di navigazione gestisce un collegamento giornaliero tra Genova e New York.

Ogni mattina alle 12 in punto parte una nave da Genova in direzione di New York. 7 giorni dopo, di nuovo alle 12 in punto, la nave approda al porto della Grande Mela. Tutto questo accade anche nella direzione opposta da New York a Genova, con una nave che necessita ugualmente di 7 giorni per attraversare l'oceano e che arriva sulla costa ligure alle 12.

Tutti gli orari si riferiscono all'ora locale di Genova.

Quante navi di questa compagnia si incontrano durante una traversata da Genova a New York?

2

NOVANTA, LA PAURA!

I NUMERI SONO UN ASSO NELLA MANICA

2

Pensavi che potessimo essere persone perbene in questi tempi in cui tutto è male? Il mondo è spietato, e l'unica moralità in un mondo spietato è il caso: imparziale, senza pregiudizi, equo.

Due Facce/Harvey Dent in
II Cavaliere Oscuro

Essere superstiziosi è da ignoranti, ma non esserlo porta male.

Eduardo De Filippo

Dadi e monete

Testa o croce?

Ci abbiamo giocato tutti da bambini. È semplicissimo e serve solo una moneta. Oggi però non è più così; eh già, con l'avvento dell'euro non ci sono più teste e croci sulle monete e dovremmo adattare il gioco, per lo meno nel nome, per farlo stare al passo coi tempi.

Testa o croce è perfetto per introdurre i concetti base della teoria matematica delle probabilità. Chiariamo subito: la teoria delle probabilità è elaborata sulla base della realtà, certo, ma come tutte le teorie non è la realtà. I suoi risultati sono applicabili meravigliosamente a problemi pratici e concreti: per fare un esempio, banche, assicurazioni, istituti di credito e grandi gruppi aziendali basano alcune loro scelte sui risultati ottenuti da questo pezzettino di matematica. Ci sono sempre le eccezioni, però. Infatti, uno dei cardini attorno a cui ruotano i nostri primi ragionamenti

sulle monetine è che il risultato di un lancio sia testa o croce, senza alternative. Una volta mi è capitato di tirare una moneta sul bancone di un bar: questa è planata e rimasta di taglio, in equilibrio perfetto. Luigi, il barista, in tanti anni non aveva mai visto niente di simile.

La base della teoria delle probabilità (da ora la chiameremo TDP) è molto diretta. Quando un evento è sicuro, ha probabilità 1 di avvenire. Quando ci sono due eventi inconciliabili, come nel caso della monetina, la probabilità per ciascun evento è metà di 1, cioè 1/2. Il calcolo della probabilità che avvenga un evento si fa contando i casi favorevoli e tutti i casi possibili e poi eseguendo una divisione. In altre parole, andiamo a vedere quanti sono i casi favorevoli in rapporto a quelli possibili. Ecco la famosissima formuletta:

$$P = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}$$

Applicando al caso della moneta la probabilità che lanciandola una volta esca testa è pari a 1/2, in quanto il caso favorevole è solo uno (uscita della testa) ma i casi possibili 2 (testa o croce), et voilà.

Una notazione molto usata è quella percentuale. Come il nome stesso suggerisce, basta prendere il numero calcolato con il metodo della TDP, tradurlo in notazione decimale e moltiplicarlo per cento. Quindi nel caso di prima avremo che 1/2=0,5=50%. E così ritroviamo l'intuitivo fifty-fifty per la probabilità dell'uscita della testa con un lancio di moneta.

Questo ovviamente non risolve alcun problema pratico ma ci restituisce un po' di basi per poterlo fare. Il problema spesso è proprio contare i casi favorevoli e i casi possibili, specie quando parliamo di sistemi complessi, come un mazzo di carte o insiemi molto variegati. Ma niente paura, per i giochi d'azzardo più comuni, i conti sono semplicissimi,

anche se purtroppo i risultati non impediscono che le persone scommettano delle piccole fortune. Facciamoci allora un po' di muscoli guardandoci attorno e usiamo i dadi e le monete per entrare nel meccanismo. Mentre il gioco di testa o croce è parecchio diffuso, è molto difficile che chi ve lo proponga usi più di una moneta e, per esempio, si scommetta sull'uscita di una doppia testa, una doppia croce o due uscite diverse.

Le probabilità in questi casi sono le seguenti:

$$P_{(\text{doppia testa})}=P_{(\text{doppia croce})}=\frac{1}{4}$$

$$P_{(\text{diversi})}=\frac{1}{2}$$

Notiamo come il caso croce-testa sia ora considerato equivalente al caso testa-croce. In altre parole l'ordine di uscita non conta.

Un altro caso significativo potrebbe essere calcolare la probabilità che esca due volte testa, tre volte, quattro e così via. Se tiro la moneta per aria due volte, possono accadere, come abbiamo visto, quattro cose diverse e cioè (indico testa con T e croce con C):

TT - TC - CT - CC

Quindi 4 i casi possibili e uno solo favorevole, il primo. Di conseguenza, la probabilità cercata sarà P=1/4=0,25=25%. Tirando una volta in più la moneta, avremo le seguenti combinazioni:

TTT - TTC - TCT - TCC - CCC - CCT - CTC - CTT

Qui abbiamo 8 casi possibili e ancora un solo caso favorevole, sempre il primo. Quindi la probabilità è ora P=1/8=0,125= 12,5%.

Passiamo a quattro lanci:

TTTT - TTTC - TTCT - TTCC - TCTT - TCTC - TCCT - TCCC - CTTT - CTTC - CTCT - CTCC - CCTC - CCTT - CCCT - CCCC

Ora abbiamo 16 casi in tutto e sempre uno solo favorevole. La probabilità è ora P=1/16=0,0625=6,25%.

Come forse avrete già intuito, le potenze di 2 che erano momentaneamente uscite dalla porta rientrano dalla finestra. I casi possibili crescono come le potenze di 2, ovvero raddoppiano sempre e in effetti è facile convincersi di questo: a ogni lancio della moneta ci sono due possibilità in più, testa o croce, su ciascun ramo dell'albero.

E allora attenzione! Perché adesso compiremo una operazione che sta tanto cara ai matematici: generalizziamo. Sì!

Dunque, dato che per calcolare la probabilità abbiamo scritto una frazione avente al numeratore sempre 1 e al denominatore una potenza di 2, possiamo dire che la probabilità che esca sempre testa dopo aver fatto un numero qualunque di lanci, che chiamiamo genericamente con la lettera "L", si può calcolare con la formula

$$P_L = \frac{1}{2^L}$$

I conti tornano, miei cari, e basta sostituire un numero di lanci come quelli effettuati nelle prove di prima per convincersene. Con un solo lancio la nostra variabile vale 1 (sinteticamente L=1) e ritroviamo che P=1/2. Così ora vi potrete sbizzarrire e vedere quale sarà la probabilità che lanciando la moneta 10 volte, per esempio, esca sempre testa. Proviamo? È facile adesso, basta sostituire e troviamo che P10=1/210= 1/1024 che fa circa 0,0009765 cioè circa lo 0,1%. Voi scommettereste?

Strano ma vero

Fortuna... sfacciata

Uno dei personaggi della saga di Batman è Harvey Dent detto "Due Facce". Inizialmente questo era un nomignolo affibbiato al personaggio in quanto avvocato: gli avvocati, si sa, a volte possono avere due facce nel senso che sanno essere falsi. Poi il personaggio si trova ad avere metà del viso sfigurato; e il nomignolo diventa nome a tutti gli effetti. Harvey Dent sosteneva di affidare al caso le sue scelte e tirava in aria una moneta per decisioni che spesso riguardavano la vita o la morte di chi capitava nelle sue grinfie. Purtroppo, però, la fortuna c'entrava poco: Due Facce usava una moneta truccata, con testa su entrambe le facce.

E ora che siamo diventati bravi, potremmo provare con i dadi a sei facce. Potrei chiedermi qual è la probabilità che, tirando due dadi, esca un doppio 6 e la risposta sgorgherebbe, come sempre, dalla fontanella del computo dei casi favorevoli in rapporto ai possibili. Il caso favorevole in questo caso è solo uno, mentre quelli possibili sono 36: possiamo pensare che il primo dado ha sei facce che potrebbero uscire con uguale probabilità e per ognuno di essi potrebbe uscire in abbinata una qualunque delle sei facce dell'altro dado. Quindi 6 (le facce del secondo dado) moltiplicato per 6 (le facce del primo) fanno 36 combinazioni in tutto. La probabilità sarà quindi P=1/36, che fa circa 0,028 ovvero il 2,8%.

Ancora sui dadi potrei chiedermi che probabilità c'è che esca un numero dispari su ciascun dado. È intuitivo arrivare alla conclusione che è il 25%: i numeri presenti sulle facce del dado sono per metà pari e per metà dispari; ma, se volessimo eseguire il conto, noteremmo che le combinazioni possibili sono sempre 36 e quelle favorevoli saranno date dalle tre cifre dispari del primo dado in abbinata, ciascuna,

con le tre cifre dispari del secondo. Quindi 9 combinazioni, queste:

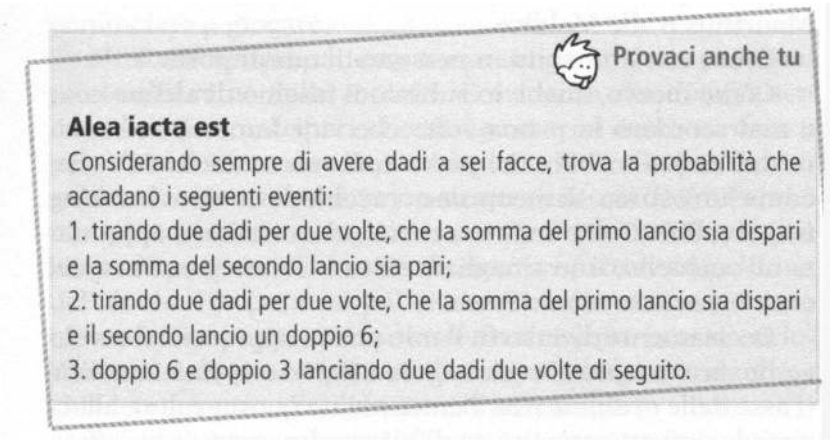
1 e 1 - 1 e 3 - 1 e 5 - 3 e 1 - 3 e 3 - 3 e 5 - 5 e 1 - 5 e 3 - 5 e 5

Ancora più stimolante è cercare di capire qual è la probabilità che accada un evento dopo un altro. Mi spiego: abbiamo due eventi che hanno una certa probabilità di verificarsi, ma devono farlo in sequenza. Questo è tradotto in matematica dalla probabilità condizionale. Tornando alla monetina, potremmo chiederci qual è la probabilità che, tirando una sola moneta, esca testa al terzo lancio dopo che è uscito due volte croce. Come si è detto, possiamo esaminare questi casi facilmente perché sono equivalenti al lancio di tre monete in contemporanea. La sequenza che ci interessa sarà quindi CCT e, come si vede poco sopra, ce ne una sola tra 8. La probabilità sarà allora P=1/8. Ma possiamo arrivare a questo risultato calcolando il prodotto delle probabilità parziali, metodo molto potente. Cioè possiamo chiederci: qual è la probabilità che al primo lancio esca C? Ovviamente il 50%, dunque scriviamo P1=1/2. Idem per il secondo, dunque P2=1/2. E, infine, qual è la probabilità che al terzo lancio esca testa? Sempre lo stesso, per cui P3=1/2. Otteniamo la probabilità cercata facendo il prodotto delle tre, e cioè:

$$P=P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Questo metodo ha il vantaggio evidente di non obbligare al computo di tutte le possibilità: contiene già in sé, nell'algoritmo di moltiplicazione, questo calcolo. Quindi possiamo dire che la probabilità che si verifichi un certo fatto, se è avvenuto un altro fatto, si esprime e si calcola facendo il prodotto delle probabilità parziali. Come si può intuire dalla formula sopra, a ogni lancio, ogni esito ha le stesse

probabilità del primo lancio. In parole povere, anche se fosse uscita dieci volte di seguito testa, all'undicesimo lancio la probabilità che esca di nuovo testa è sempre il 50%. Ne deduciamo che è sciocco studiare il passato per ricavarne una regola per il presente, quando si sa che il presente è indipendente dal passato. Ogni lancio è scollegato dagli altri in questo gioco, come in tutti quelli di puro caso.


Provaci anche tu
Alea iacta est
Considerando sempre di avere dadi a sei facce, trova la probabilità che accadano i seguenti eventi:
1. tirando due dadi per due volte, che la somma del primo lancio sia dispari e la somma del secondo lancio sia pari;
2. tirando due dadi per due volte, che la somma del primo lancio sia dispari e il secondo lancio un doppio 6;
3. doppio 6 e doppio 3 lanciando due dadi due volte di seguito.

Insalata per gli impiegati

Chiariamo una cosa. Non sono un matematico secchione e immune dal fascino delle belle cose, dal glamour di determinati ambienti, dallo charme di alcuni personaggi. Per esempio, sono stato al casinò e anche più di una volta. E non per fare esperimenti, o almeno non principalmente per quel motivo. Ora vi dirò una cosa che - lo so già – mi metterà nei guai: ho sempre vinto.

C'è da dire che ho sempre vinto poco, ma sono anche sempre partito con poco, riuscendo comunque a triplicare e a volte a quadruplicare la somma che avevo all'ingresso. Quindi, cari acuti pensatori, facendo una celere proporzione

vi starete già fregando le mani e starete già dicendo ai vostri amici di scaldare i motori dell'auto che vi condurrà al più vicino casinò visto che state per leggere la formula magica che vi darà tredicesima, quattordicesima, quindicesima e anche sedicesima. Purtroppo non è così: non ho nessuna formula per vincere sempre; altrimenti, come mi precede spesso qualcuno rispondendo al posto mio quando mi viene posta questa domanda, sarei alle Bahamas, alle Mauritius o alle Maldive.

Giuro che non abito in nessuno di questi posti.

Come dicevo, anche io subisco il fascino di alcune cose e mai scorderò la prima volta che vidi James Bond uscire dall'acqua torbida del porto con una muta da sub che, come un'ostrica di neoprene, racchiudeva uno smoking impeccabile. Colta una rosa rossa sul cammino e appuntata all'occhiello, uno smagliante Sean Connery entrava nel casinò come se niente fosse.

Decisamente diverso fu il mio primo approccio al tavolo verde: arrivammo al casinò di San Remo con una Lancia Y (l'asse delle ordinate non c'entra niente questa volta); allacciata la cravatta con l'aiuto di mio padre, entravo spaesato e curioso. Dopo essermi aggirato tra i tavoli a mio agio come un pachiderma in una cristalleria, accadde un fatto insperato, che avevo sognato per buona parte del tragitto in autostrada: a un voluminoso ricco signore cadde per terra una fiche di grosso valore. Credo che fosse di 10.000.000 di lire (quindi circa 5.000 euro): nel 1997 erano una bella cifra.

Con indosso le sole scarpe davvero eleganti del mio guardaroba, e con il mio generoso 44 e mezzo, avevo le carte in regola per coprire la fiche, raccoglierla e poi, chissà, tenermela o magari restituirla al proprietario nella speranza di una ricompensa. Dopotutto, avevo appena visto persone sperperare il denaro in una maniera che mai avrei potuto immaginare. Conoscevo con buona precisione l'ammontare

dello stipendio da ferroviere di mio padre, e lo vedevo bruciare ogni pochi secondi senza soluzione di continuità. Bruciare su tavoli verdi. A ogni modo, il sogno s'infranse subito, con il fragore di una bolla di sapone che scoppia sul naso di un bambino. Il corpulento e danaroso signore si girò nel suo impeccabile abito bianco e raccolse la "piastra" mettendola dentro un bel mazzo di sorelline che le tenessero compagnia. Io misi la mano in tasca e decisi di cominciare a giocare.

Mi sono sempre chiesto come vengano sistemati i numeri sulla ruota della roulette. È evidente che c'è un'alternanza di pari e dispari che disegnano un motivo rosso e nero. Ma come sono disposti i numeri? E c'è davvero bisogno che siano messi in un determinato ordine? Perché non possono stare semplicemente in sequenza? Credo che siano disposti in modo tale da non favorire nessuna zona del tavolo. Ho fatto un po' di ricerche ma non ho trovato niente in proposito, per adesso. Ovviamente la mia curiosità non si dà pace e prima o poi saprò, magari andando a chiedere proprio alla direzione di un casinò.

Il casinò è sempre considerato un posto un po' inaccessibile, pericoloso e non sempre ben frequentato. Questa credenza è matematicamente infondata e vedremo perché. Cerchiamo di architettare un sistema che, basandosi sul calcolo delle probabilità, esprima matematicamente quale gioco sia più conveniente, per così dire, e soprattutto quanto stiamo rischiando davvero ogni volta che facciamo una puntata. La roulette si presta benissimo a questo esercizio.
Sappiamo che i matematici hanno la mania di essere sintetici e chiamare tutte le quantità con lettere. Facciamoli contenti una volta di più e chiamiamo il gruzzolo da noi giocato con la lettera G, iniziale di "giocata". Chiamiamo poi con V di "vittoria" la somma che riceveremmo in caso di vincita. Infine indichiamo con la lettera M di "multiplo" un numero che, moltiplicato per la puntata giocata, ci indi

chi la somma che vinceremmo. Dunque possiamo scrivere che V=M•G.

E ora arriviamo alla parte più importante: ci dobbiamo chiedere, e possibilmente anche rispondere, come giudicare un gioco d'azzardo, cioè come sono le quote di vittoria in rapporto alla probabilità di vittoria calcolata con la TDP e che continueremo a chiamare P.

Supponiamo che a testa o croce, tirando una sola moneta, si vinca il doppio della posta. Cioè che, facendo una giocata G=10 euro, in caso di vittoria la vincita sia V=20 euro. Quindi in questo caso avremmo M=2. Come sappiamo, la probabilità di uscita è 1/2; dunque possiamo dire che questo gioco è equo, nel senso che la vincita è la giusta controparte del rischio che il giocatore si prende. A questo punto, potremmo costruire un indicatore che ci dica se un gioco è conveniente (o no) e quanto facendo il prodotto di queste quantità. Chiameremo questo indicatore con la lettera R, che sta per "rendimento".

Di conseguenza, con R=M•P possono verificarsi tre situazioni:

- R=1. È il caso che abbiamo appena visto. Il rischio è la equa controparte della vincita. Possiamo dire che quando R è uguale a 1 (e non lo sarà mai) il gioco è equo.
- R>1. In questo caso il rischio per il giocatore è addirittura inferiore all'eventuale vincita: giocare conviene sempre! Sarebbe come se al semplice gioco di testa o croce venisse pagata tre volte la giocata in casi di vittoria. Una possibilità su due ma tre volte la giocata: evidente che conviene giocare.
- R<1. Questo è il caso in cui incapperemo sempre, purtroppo. Il gioco è svantaggioso per il giocatore e, quando c'è, è conveniente per il banco. Il ragionamento per cui si arriva a questa conclusione è del tutto analogo a quello del caso R>1.

Proviamo allora a vedere cosa succede applicando queste considerazioni al tavolo verde.

Sulla roulette ci sono 37 numeri, cioè i numeri dall'uno al trentasei con la non indifferente aggiunta di una casellina in più, anch'essa verde: lo zero. Sembra una sciocchezza vero? È grazie a essa che i casinò guadagnano, almeno nel gioco della roulette. Infatti, se voi puntate su un numero secco, in gergo un "pieno", e vincete, il banco vi restituisce 36 volte la posta. Usando la nostra formuletta possiamo dire che M=36. Ma i numeri sulla roulette, e sul tavolo da gioco, sono 37, quindi la probabilità di vittoria di un pieno è 1/37. Dunque il rendimento di questo gioco è

$$R = M \cdot P = 36 \cdot \frac{1}{37} = \frac{36}{37} \cong 0,973 = 97,3\%$$

Il guadagno del casinò si può calcolare a partire dal nostro rendimento considerandolo semplicemente come il complementare. Per ogni puntata semplice, il casinò guadagna, in media, il 2,7%. Poco? Be', su quello che avevo giocato io forse sì, ma considerate il 2,7% di tutte le puntate tutti i giorni: non è poco.

Proviamo a vedere che succede scommettendo diversamente. Giocando una sestina, per esempio, puntiamo su sei numeri contemporaneamente e le sestine possibili sono 6: da 1 a 6, da 7 a 12 (la mia preferita), da 13 a 18, da 19 a 24, da 25 a 30, da 31 a 36. In caso di vittoria, ora vinceremmo 6 volte la posta, quindi M=6. La probabilità di uscita della sestina si calcola, al solito, come casi favorevoli, che sono 6, divisi per casi possibili, i soliti 37.

Proviamo a calcolare ora il nostro rendimento e il guadagno del casinò.

$$R = M \cdot P = 6 \cdot \frac{6}{37} = \frac{36}{37} \cong 0,973 = 97,3\%$$

Esattamente come prima. E ogni tentativo di cambiare questo rendimento è vano. Le regole del casinò sono state studiate in modo tale che, anche se qualcuno ogni tanto vince, la somma totale dei soldi scommessi dai giocatori sarà superiore a quelli sborsati. L'unica piccola eccezione sta nella cosiddetta "puntata semplice" dove si punta su metà dei numeri del tavolo (a parte lo zero) e in tre modi diversi: rosso o nero, primi o secondi diciotto numeri, pari o dispari. In caso di uscita dello zero, le puntate vengono lasciate al loro posto per il giro successivo; in questo caso il rendimento sale leggermente (98,61%), portando il guadagno del casinò all'1,39%. Ci sono modi molto creativi di combinare i numeri da giocare. Oltre alla già citata puntata semplice, alla sestina e al numero pieno, è possibile scommettere anche sulle dozzine, sui cavalli (i numeri vicini a quello secco), al carré (una disposizione a quadrato, mettendo le fiche sull'incrocio delle linee).

Chi vince ha l'abitudine di lasciare una mancia ai croupier che loro infilano dentro una fessura del tavolo da gioco esclamando "impiegati!". Vuol dire che si è appena ricevuta una mancia. Ma il compito del croupier è soprattutto tirare la pallina in modo deciso e farle fare tanti giri: più giri farà e più sembrerà (e forse sarà) casuale il posizionamento finale. E poi pagare le vincite e rastrellare tutte le fiche che invece tornano al banco. In gergo questo ammasso lamellare di denaro si chiama "insalata", ma da parte dei giocatori è tutt'altro che facile da digerire!

Non ti pago! Il lotto tra sogno e realtà

E qui arriviamo a una nota dolente, un argomento spinoso, che non fa dormire la notte e, se fa dormire, è solo per sognare qualcuno che ci possa... consigliare quali numeri giocare il giorno dopo.

Il lotto è forse il gioco più conosciuto, giocato, amato e odiato dagli italiani. Le sue origini sono molto antiche e si è affermato (e continua ad affermarsi) nei periodi più bui per l'economia di un Paese, quando la gente ha meno soldi in tasca e così spera, con una giocata, di avere la fortuna di guadagnarsi un divano nuovo, un televisore di ultima generazione, un viaggio, se non di pagarsi qualche bolletta senza fatica. Credo sia molto indicativo che il premio più alto per l'ultima invenzione "lotto-style", ovvero Win for Life, sia il pagamento non di una cifra ingente ma di un vitalizio di 4.000 euro al mese per 20 anni pubblicizzato dallo slogan "La vita è più leggera con 4.000 euro al mese!". Decisamente preoccupante.

Al Sud, la diffusione del lotto sembra sia maggiore: è considerato normale andare a giocare qualche numero ogni settimana e anche io da bambino mi sono trovato spesso nell'imbarazzante situazione di consigliare numeri da giocare. L'imbarazzo crebbe dopo che, le prime volte, "regalai" numeri vincenti: pare assurdo raccontarlo, ma creai delle vere e proprie aspettative. Ovviamente non possedevo poteri divinatori, e non li possiedo tuttora, quindi la magia ben presto finì. Ma non riuscivo a capire perché, una volta giocati due numeri (supponiamo il 7 e il 24), c'erano reazioni di grande delusione e rammarico se a uscire erano numeri "vicini", come 8 e 25.

Perché prendersela tanto? Dopotutto i numeri non erano in fila, non venivano scelti tirando una pallina sulla fila dei numeri da 1 a 90 messi in ordine crescente. I numeri erano dentro bussolotti infilati in un'urna e mescolati tante volte prima di venire estratti. Ogni numero ha la stessa probabilità di uscire di tutti gli altri: una volta giocati 7 e 24, si perde comunque, sia che escano 8 e 25 sia che escano 1 e 2. Perché arrabbiarsi di più? Ho provato a spiegare questa cosa ai miei genitori e soprattutto ai miei zii, ma non c'è stato niente da fare. Persino in una commedia di Eduardo

De Filippo, Non ti pago, il protagonista, gestore di una ricevitoria del lotto, vede il suo assistente azzeccare una quaterna e fare una vincita stellare proprio sotto il naso; come se non bastasse, la serie vincente è 1-2-3-4. Oltre al danno, la beffa. Per di più, i numeri sono stati suggeriti in sogno al giovane assistente dal defunto padre del protagonista, il quale si rifiuta di pagare la vincita al giovane.

Proviamo invece a trattare la questione dal punto di vista matematico e vediamo che succede. Supponiamo di considerare per adesso solo le vincite "secche", cioè i numeri giocati su una sola ruota. Calcoliamo quanti sono i casi possibili, ovvero quante possibili estrazioni diverse ci possono essere su una ruota. Il primo numero viene estratto tra 90 numeri, quindi può uscire in 90 modi diversi. A ognuno di questi, si unisce la seconda estrazione che può essere fatta in 89 modi diversi. Cominciando a contarli, dovremmo analizzare le combinazioni del tipo

1-1, 1-2, 1-3, ..., 1-90, 2-1, 2-3, 2,4, ..., 2-90, 3-1, 3-2, ..., 3-90, ..., 90-88, 90-89.

Già così sono molte: 90-89=8010 combinazioni diverse. E abbiamo estratto solo due numeri! Proseguiamo: dobbiamo farlo anche per il terzo, il quarto e il quinto numero. Perciò dobbiamo calcolare le combinazioni che ci rimangono; scopriamo così che il loro numero è davvero enorme:

$$90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 = 5.273.912.160$$

Ora non ci rimane che dividere questo numero per le estrazioni equivalenti. Cioè, supponendo di estrarre due soli numeri, in caso escano 1-2 o 2-1 (è indifferente ai nostri fini: queste configurazioni sono equivalenti). Ora, le configurazioni equivalenti con 90 numeri per cinque estrazioni si possono calcolare in maniera analoga a quello che abbiamo fatto

prima; quindi, se estraessimo due numeri, avremmo due configurazioni equivalenti che corrispondono allo scambio "primo posto" con "secondo posto". Aggiungendo una terza estrazione, le combinazioni diventano sei perché il terzo estratto può essere collocato al primo, al secondo o al terzo posto. Di conseguenza, 3•2=6. Procedendo così, otteniamo 6•4=24 modi per il quarto estratto e 24•5=120 per il quinto. Dunque dovremo dividere il numerone di cui sopra per 120; otteniamo un numero che è anch'esso un numerone:

$$\frac{5.273.912.160}{120} = 43.949.268$$

Questi sono i casi possibili. Esiste un modo automatico e diretto che ci permette di calcolare queste combinazioni: il coefficiente binomiale. Per brevità, indichiamo le moltiplicazioni del tipo 25•24•23•...•1 come 25!. Lo si legge "25 fattoriale", non urlando il numero 25.

Quindi, il numerone che abbiamo calcolato per primo è 90•89•88•87•86, che potremmo scrivere in breve come

$$\frac{90!}{85!}$$

In pratica, partiamo dal numero più elevato e ci fermiamo a moltiplicare quando abbiamo raggiunto il numero di estrazioni che cercavamo, cioè 5. In termini più generali, possiamo scrivere quel numero come

$$\frac{90!}{(90-5)!}$$

Successivamente abbiamo anche diviso per un numero che abbiamo trovato di nuovo per una ripetizione di moltiplicazioni. Se andate a controllare poche righe sopra,

quello che abbiamo effettuato è stato 1•2•3•4•5, vale a dire proprio 5!. Riassumendo tutto in una formula, troviamo quello che si chiama coefficiente binomiale: si legge "90 su 5" e ci restituisce il numero di combinazioni senza ripetizione di 90 numeri, 5 per volta.

$$\binom{90}{5} = \frac{90!}{5!(90-5)!}$$

Più in generale, se volessimo le combinazioni di n elementi k a k, la formula è

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Tornando a bomba sulle nostre giocate, il numero dei casi favorevoli dipende da cosa intendiamo giocare. Se scegliamo un ambo, le combinazioni sono calcolabili in un modo ingegnoso. Abbiamo giocato due numeri, giusto? Bene, le combinazioni che hanno quei due numeri al loro interno saranno tutte quelle di ottantotto numeri presi tre per volta, ovvero 88 su 3.

$$\binom{88}{3} = \frac{88!}{3!(88-3)!} = \frac{88!}{3!\cdot 85!} = \frac{88\cdot 87\cdot 86\cdot 85!}{6\cdot 85!} = \frac{88\cdot 87\cdot 86}{6} = 109.736$$

E ora siamo pronti a calcolare la probabilità che, giocati due numeri, effettivamente escano.

$$P = \frac{109.736}{43.949.268} \cong 0,0025 = 0,25\%$$

Cioè circa 1 su 400. Un po' bassina, non trovate? Ma se questa fosse ben ripagata, il gioco potrebbe valere la candela. Lo Stato però paga solo 250 volte la giocata; quindi calcolando il rendimento come siamo abituati, troviamo

che R=250•0,0025=0,625 e di conseguenza G=0,375=37,5%. Pensavate che il casinò si prendesse beffe di voi guadagnando il 2,7%? Lo Stato guadagna in media più del 37% e solo per gli ambi! Infatti, facendo lo stesso calcolo per le altre giocate, ecco quello che si trova (approssimando un po'):

Giocata	Probabilità di vittoria (percentuale)	Probabilità di vittoria (espressa come 1 su...)	Vantaggio teorico dello Stato
Ambo	0,25%	1/400	37,5%
Terno	0,0085%	1/11.748	63,8%
Quaterna	0,000019%	1/511.038	84,3%
Cinquina	0,00000227%	1/43.949.268	97,7%

Il numerone che esprimeva il numero di possibili per ogni ruota riappare tale e quale nella probabilità espressa come "1 su ..." nel caso della cinquina.

Ricordiamo che in un gioco "equo", il rendimento è sempre 1 e il guadagno del banco (dello Stato in questo caso) zero. Questo non vuol dire che non guadagna niente, ma solo che non ha costruito i premi in suo totale favore. In altre parole, anche nell'improbabile caso della cinquina, il guadagno sarebbe dovuto essere comunque zero, per essere un gioco equo. O meglio, il premio sarebbe dovuto essere molto ma molto più alto, data la difficoltà con cui si verifica questo evento.

Per dare un'idea, la probabilità di azzeccare una quaterna, è più o meno uguale a quella di imbroccare a testa o croce 19 lanci di fila. Infatti in quel caso la probabilità è di 1/219= 1/524.288.

Ma ha senso parlare dei numeri ritardatari? La teoria delle probabilità ci dice in prima istanza di no. Ogni volta che viene fatta un'estrazione, i bussolotti vengono tutti rimessi dentro, quindi ogni volta tutti i numeri hanno le stesse probabilità di uscita. È però anche vero che, in un ampio lasso di tempo e ripetendo molte estrazioni, tutti i numeri escono più o meno (e vedremo dopo cosa significa)
Lo stesso numero di volte; in questi termini, parlare di ritardatari potrebbe avere senso.

Qualche tempo fa, un istituto inglese svolse un'indagine su quale fosse il giorno più piovoso della settimana basandosi sui dati pervenuti. Il risultato fu il martedì.

Ora, si possono fare due cose: o credere che il martedì piova di più perché l'inquinamento dovuto allo shopping del week-end generi condizioni atmosferiche più adatte alla pioggia, oppure pensare che questo genere di indagini non abbia senso. Nel primo caso, stiamo cercando una qualche correlazione fra la pioggia e altri eventi: stiamo elaborando una teoria in base alla quale i due fatti potrebbero essere in connessione. Nel secondo, che vi esorto a considerare, stiamo affermando che estrapolare teorie a volte non ha senso.
Il martedì piove di più solo perché ha piovuto di più. Non è affatto detto che ci sia sempre una ragione che determini tutti gli eventi.
Che senso ha, allora, elaborare statistiche su numeri che vengono estratti a caso? La questione dei cosiddetti ritardatari fa riferimento alla legge dei grandi numeri, la quale si limita ad affermare che dopo infinite estrazioni tutti i numeri saranno usciti un egual numero di volte. E anche se cinquemila, un milione o un miliardo ci possono sembrare numeri "grandi", sono niente rispetto all'infinito. Quindi tutti i ragionamenti che si basano sui ritardatari sono fallaci e sono solo un modo per indurre le persone a fare calcoli improbabili. Può darsi che vincerete ogni tanto ma, nel complesso, non avverrà. Certo, ci sono casi in cui

qualcuno gioca una volta e vince un sacco di soldi: e infatti vengono sbandierati dai media e dalle stesse ricevitorie che affiggono cartelli che annunciano trionfanti "qui vinti n-mila euro", come se questo fosse un marchio di qualità o una garanzia di future vittorie. I casi in cui si perde, però, nessuno li racconta.

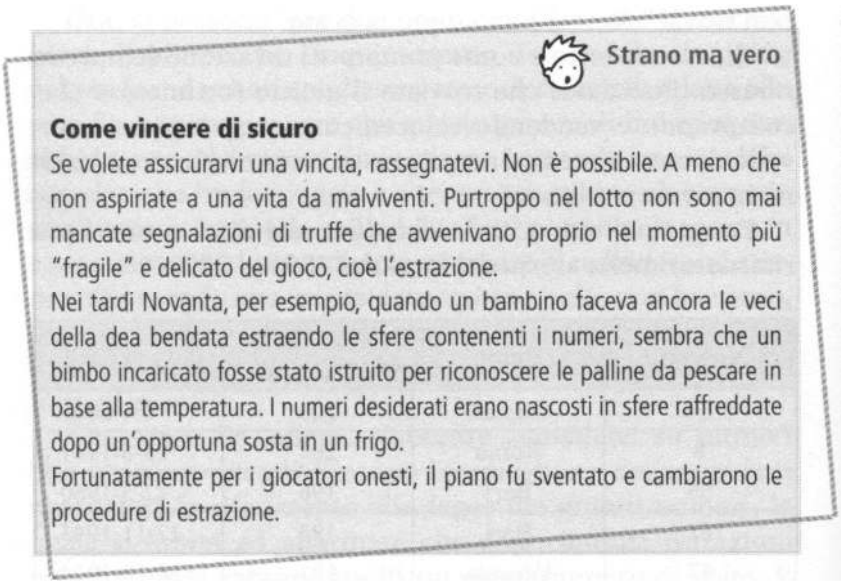
Una volta entrai in una tabaccheria e la titolare mi chiese, porgendomi lo scontrino di quello che avevo acquistato: "Vuole giocare?" "No, grazie" risposi. "Ma guardi che qui la settimana scorsa hanno vinto 20.000 euro!" insistette. A quel punto non riuscii a resistere e chiosai: "Be', allora è altamente improbabile che si vinca due settimane di fila, non trova?" Non ci ha mai più provato.

Giocare al lotto è come puntare su un'azione sempre in ribasso. Può darsi che troviate il giorno fortunato e che, comprando e vendendo velocemente, scopriate un intervallo di crescita temporanea, ma voi puntereste su un'azione in perenne ribasso?

Comunque sia, ecco la classifica dei dieci numeri più ritardatari nella storia del lotto dal 1871 al 2009.

Numero	Ruota	Numero di estrazioni	Data di uscita
34	Cagliari	203	1-4-2006
8	Roma	201	23-8-1941
55	Bari	196	12-3-1960
82	Bari	193	27-11-1943
67	Venezia	191	18-10-1924
71	Cagliari	191	26-6-1971
47	Bari	189	13-11-1917
28	Bari	187	26-7-1902
53	Venezia	182	9-2-2005
11	Torino	181	4-4-1931

Amo andare controcorrente e, chiudendo la questione dei ritardatari, qualche volta ho pensato che forse mi conviene puntare su un numero che esce sempre e non su uno che non esce mai! Il ragionamento è del tutto analogo, ma la nostra mente è portata a interpretare determinate situazioni in maniere fallaci. Una scarsa alfabetizzazione matematica va a vantaggio di chi propone questi giochi e costruisce un business enorme lucrando sia sui pochi soldi spesi da qualcuno, che tenta la fortuna di tanto in tanto, sia su quelli di chi cade in situazioni di dipendenza, malattia e disperazione.



Strano ma vero

Come vincere di sicuro

Se volete assicurarvi una vincita, rassegnatevi. Non è possibile. A meno che non aspiriate a una vita da malviventi. Purtroppo nel lotto non sono mai mancate segnalazioni di truffe che avvenivano proprio nel momento più "fragile" e delicato del gioco, cioè l'estrazione.

Nei tardi Novanta, per esempio, quando un bambino faceva ancora le veci della dea bendata estraendo le sfere contenenti i numeri, sembra che un bimbo incaricato fosse stato istruito per riconoscere le palline da pescare in base alla temperatura. I numeri desiderati erano nascosti in sfere raffreddate dopo un'opportuna sosta in un frigo.

Fortunatamente per i giocatori onesti, il piano fu sventato e cambiarono le procedure di estrazione.

Volete un consiglio da matematico curioso?

Non giocate, anzi giocate una volta l'anno, il giorno in cui siete nati, oppure durante le feste o il giorno del compleanno di vostro figlio, come vi pare. Giocate i numeri che vi stanno più simpatici e pochissimi soldi sull'evento meno probabile.

Non vincerete quasi di sicuro; ma se vincerete sarà bellissimo, non trovate? Vi ho disilluso? Sono stato cattivo? Pensate che il matematico Bruno De Finetti definì il lotto e i giochi basati sulla fortuna come una "tassa sugli imbecilli"...

In conclusione, spero che nessuno credesse di trovare in questo capitolo una formula magica per vincere al lotto o a un altro gioco. In ogni gioco c'è un rischio e chi gioca dovrebbe conoscerlo. Questo non significa che non si debba giocare mai, anche se è la scelta più razionale, ma che è giusto che chi scommette i propri risparmi sappia qual è il rischio cui va incontro. Dopodiché può decidere se tentare o meno la sorte. La matematica può sicuramente aiutarci a difenderci dall'industria del "gratta e perdi" e faccio qui tre considerazioni (be', dicono sia il numero perfetto):

- Il modo migliore e più sicuro per vincere è non giocare affatto. Provate a mettere da parte i soldi che giochereste ogni volta che ve ne viene voglia e vedrete che a Natale potrete fare regali più belli.
- Ci sono alcuni giochi che, a dispetto della fama che li circonda, sono più "onesti" di altri. Ovvero il rischio è minore. Se vi va di provare l'ebbrezza del gioco, ora sapete qual è in realtà il rischio al quale andrete incontro.
- Se proprio avete voglia di farlo, giocate i vostri numeri fortunati, quelli che avete sognato o che credete che qualcuno vi invii per posta medianica dall'aldilà. Non sarà per quel motivo che vincerete (se vincerete), ma probabilmente sarà più piacevole.

3

NON APRITE QUELLA PORTA (LOGICA)

CURIOSANDO CON BILL GATES...
E ANCHE CON STEVE JOBS

3

Noi siamo analogici ma dobbiamo diventare digitali!

Beppe Grillo

Treni di impulsi su numeri binari

Come qualcuno sa, girano molte barzellette e battute di argomento strettamente matematico. Spesso sono difficili da capire senza una preparazione adeguata. Questa è una delle "peggiori":

Il mondo si divide in 10 tipi di persone: quelli che contano in binario e quelli che non lo fanno.

Il nostro compito in queste pagine sarà di... capire il significato di questa battuta.

Noi contiamo su base 10. Sappiamo tutti che, dopo il numero 9, si aggiunge una decina e si ricomincia da capo con le unità. Stesso discorso quando arriviamo a 99 e passiamo alle centinaia e così via. Qualcuno ha detto che tutto è relativo, vero? Bene, in questo caso avrebbe ragione da vendere, perché non tutti e non sempre hanno contato e contano così. La nostra base di numerazione - cioè il

numero che abbiamo scelto per "andare a capo" e passare alla posizione di maggior valore (le decine per le unità, le centinaia per le decine ecc.) - è 10, per un motivo molto più pratico di quanto si pensi. Provate a guardarvi le mani. Avete capito? Bravi! Personalmente, non ci ero mai arrivato da solo. Quando lo lessi su un libro, avrei voluto darmi un colpo in testa e dissi una frase che gli scienziati usano spesso: "Come ho fatto a non pensarci prima?"

Strano ma vero

Tetris e la matematica

Dichiarato uno dei dieci videogiochi più importanti di sempre, Tetris è stato oggetto di analisi accurate da parte del mondo matematico. In un articolo molto famoso, *Tetris is hard, even to approximate*, uscito su "Computer Science" nel 2002 a firma di Erik D. Demaine, Susan Hohenberger e David Liben-Nowell, viene dimostrato che una partita si conclude comunque con una sconfitta del giocatore. Tetris si gioca con sette tipi di pezzi (chiamati con le lettere dell'alfabeto cui più somigliano: "I", "T", "O", "L", "J", "S" e "Z"), ognuno formato da quattro blocchetti. Ebbene, esiste un numero N tale che una sequenza di pezzi "S" e "Z" conduce alla sconfitta.

Se siete davvero degli inguaribili curiosi, come io credo, vi chiedo di fare un piccolo sforzo di astrazione e di immaginare che un numero non corrisponda al modo di rappresentarlo.

Pensate a un gregge di pecore (ma non fatele saltare, altrimenti potreste addormentarvi proprio a metà paragrafo!), un gregge composto da 16 pecorelle, lo vedete? Bene, se il pastore le volesse contare, comincerebbe dalla prima, poi passerebbe alla seconda: 1, 2, 3, ..., 9, 10, 11, ..., 16. Ha usato la notazione posizionale in base 10, ovvero, arrivato

a 9, ha usato un'altra posizione, di maggior valore, per indicare una decina e zero unità (per il numero 10), poi una decina e una unità (per il numero 11) e così via. Supponiamo che arrivi un mercante da un paese lontano, che voglia comprare il gregge. L'uomo viene da un paese ricco e anche lui è pieno di soldi; quindi il pastore è ben felice di vendere il gregge facendo un buon affare. Comunica al mercante che le pecorelle costano ognuna un certo quantitativo di denaro.

L'acquirente si mette allora a contare le pecore per conoscere il totale. Il pastore è molto stupito quando vede che il mercante conta con una sola mano, e non sa cosa aspettarsi. 1, 2, 3, 4, 5, prima cinquina! 11, 12, 13, 14, 15, seconda cinquina! 21, 22, 23, 24, 25, terza cinquina! 31... Sta contando in base 5: secondo lui ci sono 31 pecore. Il pastore si frega le mani, ma non riceverà un solo centesimo in più di quanto gli spetti.

Questo succede perché il modo di rappresentare un numero non cambia l'essenza del numero stesso. È come se avessimo un oggetto davanti agli occhi e ci venisse chiesto di descriverlo. Un ingegnere, che ha una mente analitico-descrittiva, potrebbe riferirne le dimensioni, il colore, il posizionamento e così via. Un poeta potrebbe vedere lo stesso oggetto in modo diverso e parlarne usando figure particolari, scorgendo dentro quell'oggetto un'allegoria della passione per una donna (o per un uomo) la metafora di un valore, come la lealtà o l'amicizia. Ancora, un pittore potrebbe illustrarlo notando le sfumature di colore, il modo in cui la luce avvolge la superficie, l'invasione dei volumi nello spazio... Ma l'oggetto è sempre quello.

Non abbiate paura, non mi sto lanciando in una discussione filosofica sulla realtà oggettiva, anche se sarebbe interessante. Quello che voglio dire è che il nostro modo di contare è un abito; altri ne hanno usati di diversi - i maya per esempio contavano in base 20 - e altri ancora li usano

oggi, come una tribù autoctona della Papua Nuova Guinea che conta in base 33. Cambiare un vestito non cambia la sostanza della persona che lo indossa. Dato che l'abito non fa il monaco, potremmo traslitterare dicendo che... l'abito non fa il numero. Dal momento che ci hanno sempre raccontato che nel computer ci sono tanti numeri, a questo punto è legittimo chiedersi quale... abito usi, cioè in quale base conti. Vi stupirà un po' sapere che questi oggetti - sempre più veloci, sempre più intelligenti, sempre più potenti - contino in una "misera" base 2.

Il motivo? Semplice, il computer non ha le dita, usa l'elettricità per fare tutto: operazioni, calcoli e algoritmi. L'elettricità in un certo punto di un circuito ha due sole possibilità che sono "passare" e "non passare". Due possibilità, dunque base 2. Realizzare un elemento con due stati è molto più semplice che uno con molti stati, inoltre avere base 2 mette in corrispondenza i numeri con i valori logici di "vero" e "falso".

Il sistema numerico in base 2 è chiamato binario e, per rappresentare un numero, utilizza due simboli che sono "0" e "1".

Per scrivere un numero qualunque esplicitando la base di numerazione, possiamo moltiplicare ciascuna posizione per la potenza della base. È più difficile a dirsi che a farsi; per esempio, se volessi scrivere il numero 18 esplicitando la base, scriverei questo:

$$18 = 1 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

Con questa rappresentazione è facile vedere dove interviene la base. La base di numerazione è, non a caso, la base della potenza per la quale stiamo moltiplicando i vari numeri. Vediamo un caso, in base 2:

$$1010 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

Strano ma vero

Google, l'errore più famoso del mondo

Il nome del più famoso motore di ricerca del mondo è in realtà frutto di un errore. Larry Page e Sergey Brin, i futuri fondatori di Google, avrebbero voluto registrare il dominio come "googol" e non come "Google". "Googol", infatti, è il nome del numero 10^{100}, vale a dire 1 seguito da 100 zeri. Il termine apparve la prima volta in *Matematica e immaginazione* (1938), del matematico americano Edward Kasner, per illustrare la differenza tra un numero enorme e l'infinito; il nome gli era stato suggerito dal nipotino di 9 anni.

Per inciso, in natura non esistono "googol": persino il numero di atomi presenti nell'universo conosciuto, secondo le stime, sarebbe intorno a 10^{81}.

Page e Brin, consapevoli del fatto che un motore di ricerca avrebbe sicuramente lavorato con grandi numeri, ebbero l'idea di registrare il loro dominio come "googol"; ma digitarono per errore "Google", scoprirono che il dominio era ancora libero e decisero di conservare quel nome. Ora buona parte degli abitanti del pianeta conosce questo nome, tanto che l'American Dialect Society lo ha recentemente eletto come parola più rappresentativa del decennio.

Per capire quale sia il numero qui sopra basta fare i calcoli e scrivere il risultato nella base che ci è familiare, ovvero base 10. Eccoli:

$$1010 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 8 + 0 + 2 + 0 = 10$$

E il risultato è 10. Convertire un numero dalla base 10 alla base 2 è un giochetto divertente. Dovete cercare di scriverlo come somma non ripetuta di potenze di 2. Successivamente, lo scomponete usando la formula vista sopra. Facciamo un esempio: il 27. Dato che non vogliamo ripetizioni, dobbiamo usare 24, ovvero 16. Facendo un paio di prove si vede come 27 sia 16+8+2+1.

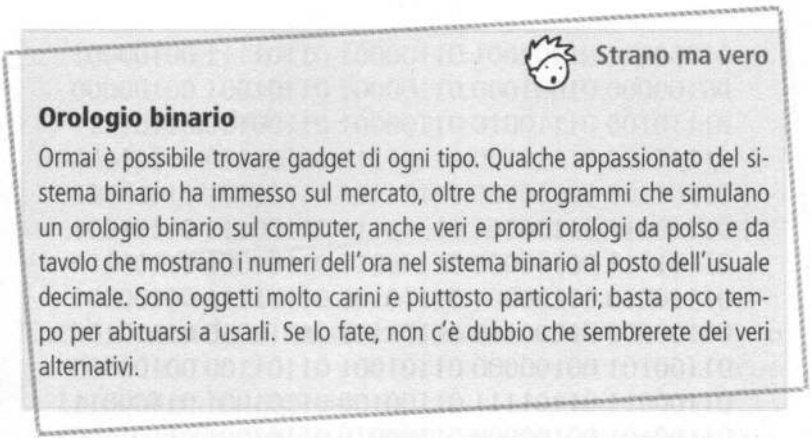
Quindi abbiamo usato tutte le potenze eccetto 22, vale a dire 4. E ora non ci resta che scrivere questo numero usando l'espressione di prima.

$$16+8+2+1 = 1\cdot2^4+1\cdot2^3+0\cdot2^2+1\cdot2^1+1\cdot2^0$$

Ci regala la scrittura in base 2, che è dunque 11011. Per comodità, esiste una tabella di conversione fra i numeri binari e quelli decimali. Riporto le prime cifre dalle quali si intravede la struttura.

Decimale	Binario
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111
16	10000

Come qualcuno noterà, si passa alla cifra in più in notazione binaria ogni volta che arriviamo alla potenza di 2, ovvero 1, 2, 4, 8 e 16.


Strano ma vero
Orologio binario
Ormai è possibile trovare gadget di ogni tipo. Qualche appassionato del sistema binario ha immesso sul mercato, oltre che programmi che simulano un orologio binario sul computer, anche veri e propri orologi da polso e da tavolo che mostrano i numeri dell'ora nel sistema binario al posto dell'usuale decimale. Sono oggetti molto carini e piuttosto particolari; basta poco tempo per abituarsi a usarli. Se lo fate, non c'è dubbio che sembrerete dei veri alternativi.

Nessuno di noi se ne accorge, ma siamo costantemente "trafitti" da questi "zeri e uni" (l'espressione mi è stata suggerita da un bambino non molto tempo fa). Telefonia, tv digitale satellitare e terrestre e, non ultimi, i sempre più accessoriati telecomandi che si nascondono guardinghi sotto i cuscini dei nostri divani. Il telecomando, per "farsi capire" dalla tv e per farle capire quale comando abbiamo schiacciato, le invia un pattern, un treno di numeri, rigorosamente assortiti fra 1 e 0. Vi ricorda qualcosa? Bravi, proprio lui, il codice Morse. La tabella di conversione che tutti conosciamo non è troppo diversa da quella che usiamo per convertire i numeri dalla base 10 al sistema binario. Anche nel codice Morse abbiamo due possibilità, che non sono 1 e 0, ma punto e linea. Esiste anche una codifica da binario a caratteri alfanumerici ed è quella che usa ogni computer. Ogni volta che schiacciate sulla tastiera la lettera "a", il vostro computer la traduce in "01100001". Guardate che cosa diventa un semplice messaggio come questo:

Ciao! Hai tradotto il messaggio cifrato!

Forte il codice binario, eh?

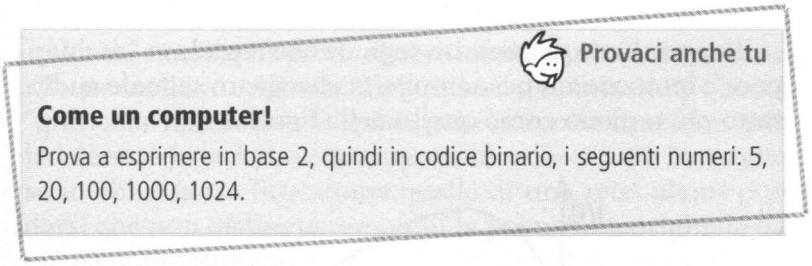
01000011	01101001	01100001	01101111
00100001	00100000	01001000	01100001
01101001	00100000	01110100	01110010
01100001	01100100	01101111	01110100
01110100	01101111	00100000	01101001
01101100	00100000	01101101	01100101
01110011	01110011	01100001	01100111
01100111	01101001	01101111	00100000
01100011	01101001	01100110	01110010
01100001	01110100	01101111	00100001
00100000	01000110	01101111	01110010
01110100	01100101	00100000	01101001
01101100	00100000	01100011	01101111
01100100	01101001	01100011	01100101
00100000	01100010	01101001	01101110
01100001	01110010	01101001	01101111
00101100	00100000	01100101	01101000
00111111			

Avete capito allora perché il mondo si divide in 10 categorie di persone? 10 è la rappresentazione binaria di 2. Ora possiamo leggere questa battuta intendendo che il mondo si divide in 2 categorie di persone, quelli che contano in binario e quelli che non lo fanno.

Strano ma vero

I... tre puntini più famosi del mondo

Forse il più famoso messaggio in codice Morse fu quello trasmesso da Guglielmo Marconi il 12 dicembre 1901: fu il primo segnale radio transoceanico partendo da Poldhu, in Cornovaglia, fino a St. John's di Terranova. Il messaggio inviato era il codice per l'S.O.S., ovvero il segnale di soccorso (*Save Our Souls*, "salvate le nostre anime"), che in Morse è codificato in tre punti, tre linee e tre punti. Il primo segnale ricevuto era composto da tre punti, la lettera S.


Provaci anche tu
Come un computer!
Prova a esprimere in base 2, quindi in codice binario, i seguenti numeri: 5, 20, 100, 1000, 1024.

Tutto il mondo si trasforma in numero

La rivoluzione digitale.

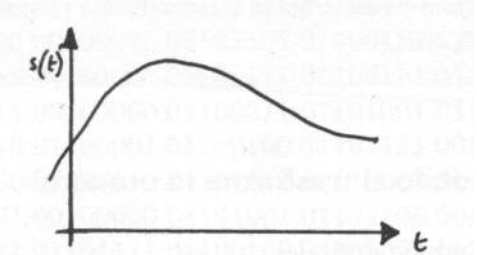
Quante volte abbiamo sentito questa espressione, perfino dentro patinati spot tecno-marchettari? "Rivoluzione" è sempre stata associata a qualcosa di tumultuoso, disordinato, anche violento e sanguinoso. Non è questo il caso, ma il termine "rivoluzione" è secondo me adeguato. Il computer, con la possibilità di creare un "file" praticamente con qualsiasi cosa, ha sconvolto il mondo in cui viviamo e continua a modificarlo. Grazie a dispositivi come scanner, schede di acquisizione audio e video, microfoni, fotocamere eccetera, è possibile importare in un computer immagini e quadri, suoni e canzoni, riprese e interi film.

Ma che cosa vuol dire compiere questa operazione? Me lo sono sempre chiesto e mi sono anche chiesto perché fosse più facile importare determinate cose, come le immagini per esempio, piuttosto che i filmati.

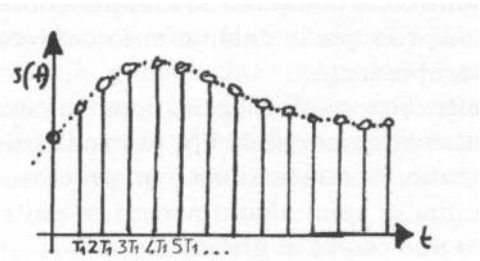
Il processo che permette di immettere un contenuto qualsiasi dentro un computer si chiama conversione analogico/digitale (da ora la chiameremo conversione A/D) e consta di vari passaggi.

Ora l'elettronica spadroneggia, eppure senza una solida base di matematica anche i chip più sofisticati sarebbero scatolette vuote. La conversione è un processo abbastanza complesso, ma ci sono alcuni aspetti in cui curiosare da matematico può essere di grande aiuto.

Supponiamo di avere un segnale che vogliamo "acchiappare"; ipotizziamo per semplicità che sia un segnale audio, fatto più o meno come quello nella figura.



Come potete vedere, il segnale è un segno fatto senza mai staccare la penna dal foglio (i matematici direbbero che è una funzione continua) e quindi, a rigor di logica, è formato da una infinità di punti vicini l'uno all'altro. Un po' troppo per entrare dentro un computer, perfino se avete comprato l'ultimo modello. Per passare dal mondo della matematica delle funzioni continue a quello dei punti discreti e finiti, è necessario operare una quantizzazione. In altre parole, quello che si fa elettronicamente è mettere la funzione sopra una specie di graticola per il barbecue e, anziché considerare la pennellata che profila la curva, si considera una serie di valori approssimati che le sono vicini. E soprattutto se ne prende in esame una quantità finita. Il risultato è quello di giocare non con questa pennellata ma con una serie di quadratini, un po' come passare da Raffaello al Puntinismo!



Va da sé che più punti si considerano più ci si avvicina alla pennellata originale. In pratica, più fitta sarà questa "graticola" attraverso la quale guardiamo la funzione, più fedele sarà la sua riproduzione "a blocchetti". Se le maglie sono abbastanza fitte, come quelle di una rete, allora può darsi che non distingueremo più la pennellata originale da quella approssimata.

Questa è la sfida della rivoluzione digitale.

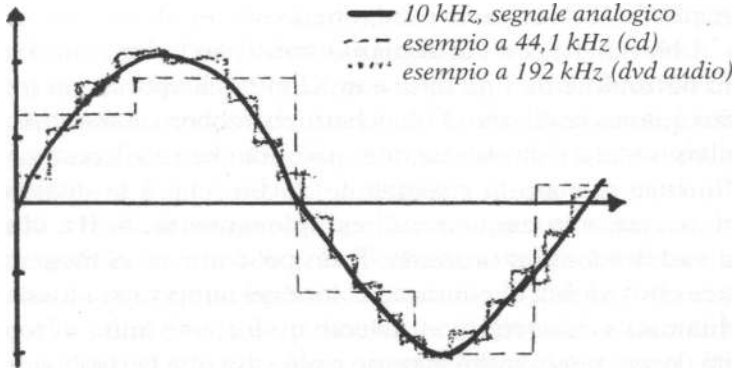
È una sfida che va giocata su molti campi: quello della conversione accurata con sensori sempre più sofisticati e a buon mercato, e anche quello dello stoccaggio dei dati. Più punti avremo preso per approssimare la funzione originale, più informazione avremo creato.

I blocchetti con cui abbiamo suddiviso la funzione hanno naturalmente una base e un'altezza che possiamo infittire quanto vogliamo. I blocchetti potrebbero essere lunghi e bassi o alti e stretti. Le due quantità che regolano queste dimensioni sono la risoluzione, in bit, che è la divisione in ascissa, e la frequenza di campionamento, in Hz, che è la suddivisione in ordinata. È un po' come se ci fosse una luce che cambia di continuo colore nel tempo e noi fossimo chiamati a descriverla attraverso un insieme finito di tonalità. Bene, più tonalità avremo e più sarà alta la risoluzione. Inoltre, quanto più rapidamente indicheremo la tonalità che descrive il colore in quel dato istante, più sarà alta la frequenza di campionamento. Va da sé che maggiori saranno entrambe le quantità, migliore sarà la descrizione della luce cangiante.

Gli informatici misurano questa informazione in byte. Ogni byte è formato da 8 bit e ogni bit è un numero che rappresenta la posizione di uno dei punti che ci sono stati messi in mano dall'operazione di conversione A/D.

Abbiamo già vissuto uno step di questa evoluzione nel passaggio dal ed al dvd e ora al Blu-ray disc. Ciascuno di questi supporti è in grado di contenere un numero maggiore

di informazioni perché, grazie allo sviluppo della tecnologia (soprattutto legata al laser a basso costo) perché si possono scrivere su questi dischi dati sempre più fitti. Avendo più memoria a disposizione, è possibile aumentare il numero di punti che approssimano il mio segnale analogico in un numero finito sempre maggiore di punti. Ecco come si presenta un segnale campionato a due differenti risoluzioni. Le "scalette" che si vedono delineano un profilo che dovrebbe approssimare la funzione "analogica" originaria. Essa si ottiene unendo i punti che abbiamo preso sulla funzione.



Con questi presupposti matematici, tradotti e realizzati dall'elettronica fortemente integrata e miniaturizzata, oggi è possibile convertire in file molti oggetti che compongono il nostro mondo ma soprattutto registrare, in memorie digitali, pezzetti della nostra vita: il primo compleanno di un figlio, la laurea di un cugino, quella serata speciale con quel panorama magico, la silhouette misteriosa di quell'istante più veloce di un battito d'ali di colibrì.

Ricordi che, diventati numeri, rimarranno per sempre inalterati.

Una vera rivoluzione.

Pazzi, pazzi teoremi

Teorema del campionamento (teorema di Nyquist-Shannon)

La branca della matematica che studia ciò che abbiamo appena introdotto si chiama teoria dei segnali. Esiste un teorema fondamentale, il teorema del campionamento, che mette in relazione il contenuto di un segnale campionato con la frequenza di campionamento e le componenti minime e massime di frequenza del segnale originale, definendo così la frequenza minima necessaria per campionare un segnale senza perdere informazioni, detta frequenza, o cadenza, di Nyquist.

Il teorema afferma che, in determinate condizioni, la frequenza minima di campionamento necessaria per evitare ambiguità nella ricostruzione del segnale è pari al doppio della banda (cioè ad almeno il doppio della frequenza della componente armonica avente frequenza più alta).

iPod e sardine in scatola

L'iPod era inevitabile.

Potrebbe essere una citazione dal film Matrix, rivolta al mai domo signor Anderson, aka Neo, aka Keanu Reeves, e invece è solo una mia considerazione.

Poter ascoltare musica mentre si cammina, ci si annoia in metropolitana, si fa sport o si legge il giornale è indubbiamente bello. La Sony lo ha capito molto tempo fa: nell'ormai lontano 1979 introdusse sul mercato il primo lettore di musica portatile, il Sony Walkman. Era un lettore di musicassette creato da Akio Morita, Masaru Ibuka e Kozo Ohsone; le sue dimensioni e il suo peso certo non hanno niente a che vedere con i lettori cui siamo abituati oggi. A ogni modo, il nome entrò nel senso comune e gradualmente il Walkman di Sony si diffuse in modo tanto capillare che il termine "Walkman" (marchio registrato di Sony) indicò qualsiasi lettore di audiocassette portatile,

anche non prodotto dalla Sony. Da allora, la tecnologia ha fatto molti passi avanti. Ci sono state fondamentalmente due innovazioni a dare una spinta verso i moderni lettori digitali. Come veri informatici, possiamo dire che sono stati necessari l'hardware e il software. L'hardware per costruire un lettore mp3 è tutto lo spazio per "stoccare" il materiale. Questo spazio, questo magazzino, prima era costituito da piccoli hard-disk e poi dalle sempre meno costose memorie. Avendo a disposizione questi "magazzini", oggi è possibile ospitare 1000 canzoni in dimensioni di 45,2x17,5x7,8 mm per un peso di 10,7 grammi.

Strano ma vero

I numeri dell'iPod

Fin dal suo debutto l'iPod è stato molto amato dal pubblico, grazie agli attenti studi sulle funzionalità, all'ergonomia ma soprattutto al design. Il suo successo globale è stato decretato nel 2004 con la presentazione dell'iPod mini e dell'iPod di quarta generazione. È a oggi il lettore mp3 più venduto al mondo e il 9 aprile 2007 Apple ha annunciato di aver superato quota 100 milioni. Il 9 settembre 2009, Phil Schiller, uno dei dirigenti Apple che spesso affianca Steve Jobs durante la presentazioni di aggiornamento dei prodotti (i cosiddetti *keynote*), ha reso noto che l'iPod aveva venduto più di 220 milioni di pezzi. Lo stesso Jobs, nel gennaio 2010, ha dichiarato infranto il muro delle 250 milioni di unità.

Il software, invece, sono i magazzinieri. O meglio, come un bravo magazziniere ha la capacità di far entrare più materiale in un magazzino, allo stesso modo il software che è nato in seno all'iPod è quello che ci permette di stoccare un file dentro un decimo dello spazio che occuperebbe. Stiamo parlando del software di compressione (e decompressione) audio, utile per rendere davvero appetibile la proposta.

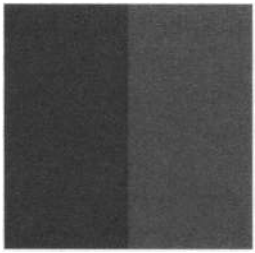
Ovviamente è stata necessaria la matematica per entrambi i settori ma noi vogliamo andare... sul morbido, e ci concentreremo sul software.

I programmi per comprimere le informazioni erano già noti da anni, soprattutto per i protocolli relativi alle immagini, come il famosissimo jpeg. Ma come funziona un algoritmo del genere e come può "schiacciare" i pacchi a un decimo del loro volume, senza rompere tutti i bicchieri di cristallo, i piatti di porcellana e le fragili note contenute in essi?

Vedremo che il metodo è davvero ingegnoso ma che... qualche piatto ogni tanto si rompe, anche se noi non ce ne accorgiamo facilmente.

Abbiamo già riflettuto su come il mondo reale, in particolare quello, ehm... artistico, si trasformi in numeri che vengono poi immagazzinati, ritrasformati in suono o immagine da un computer; numeri sui quali è possibile compiere operazioni sia nel senso letterale di "azione su qualcosa" sia in senso matematico.

Immaginiamo di avere un quadrato diviso a metà e colorato in grigio e nero, come in questa figura.



Per descriverlo, potremmo pensare di dividerlo in tanti pixel e per ognuno dire di che colore è. Quindi, immaginando di dividerlo in soli 10 pixel per lato, avremmo in totale 100 pixel di cui dobbiamo dichiarare il colore. Il risultato è questo:

grigio - grigio - grigio - grigio - grigio - grigio - grigio - grigio - grigio - grigio - grigio - grigio - grigio - grigio - grigio - grigio - grigio - grigio - grigio -grigio - nero - nero – nero - nero - nero - nero - nero - nero - nero - nero - nero - nero - nero - nero - nero – nero

Applico un algoritmo di compressione:

Ho un quadrato metà grigio e metà nero.

Come vedete, la differenza è notevole! A prima vista potrebbe sembrare uno scherzo, ma non è così. In quasi ogni informazione o segnale esiste infatti una ridondanza, come a dire che una parte di queste informazioni è inutile. Un altro esempio:

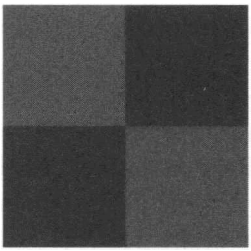
- Ho tre sciarpe nei cassetti del mio armadio.
- So che c'è una sciarpa per ogni cassetto
- Le sciarpe sono una verde una bianca e una rossa.
- La sciarpa nel primo cassetto è rossa.
- La sciarpa nel secondo cassetto è verde.
- La sciarpa nel terzo cassetto è bianca.

Secondo voi, queste informazioni erano tutte necessarie? Procedendo per esclusione, è facile convincersi di come fosse inutile dichiarare il colore della sciarpa nel terzo cassetto. Dirlo è inutile o, per esprimersi in termini più appropriati, è ridondante. Se volessi risparmiare inchiostro, potrei non fornire questa informazione in quanto, se chi legge è adeguatamente "addestrato", può arrivare alla terza informazione sulla base delle prime due.

Gli algoritmi di compressione dati fanno proprio questo: selezionano le informazioni ridondanti in fase di codifica e le recuperano in fase di decodifica, cioè schiacciano il pacco e lo riespandono.

Come avevo accennato, questo processo a volte "rompe" qualche piatto, nel senso che fa perdere davvero qualche informazione. In questo modo si distinguono gli algoritmi senza perdita (lossless) da quelli con perdita di informazione (lossy), e quindi di qualità.

Vediamo un altro esempio, sempre con i quadrati; stavolta ne abbiamo 4.



Se volessi descrivere accuratamente questa figura, potrei dare una serie di informazioni come questa:

- Ho 4 quadrati.
- 2 quadrati sono grigi e 2 neri.
- Sono disposti a formare un quadrato avente lato doppio del loro.
- Il quadrato in alto a sinistra è grigio e tocca un quadrato nero a destra e uno nero sotto.
- Il quadrato in alto a destra è nero e tocca un quadrato grigio a sinistra e uno grigio sotto.
- Il quadrato in basso a sinistra è nero e tocca un quadrato grigio a destra e uno grigio sopra.
- Il quadrato in basso a destra è grigio e tocca un quadrato nero a sinistra e uno nero sopra.

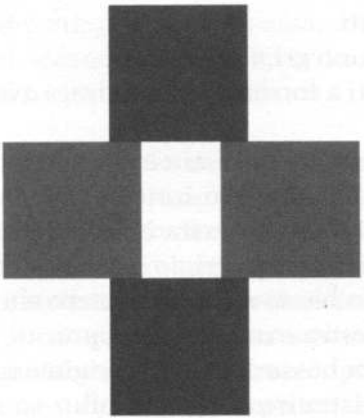
Alcune informazioni contenute in questa lista sono inutili per ricostruire la figura da parte di qualcuno che non l'ha mai vista; infatti si può considerare un elenco più corto, come il seguente:

- Ho 4 quadrati.
- 2 quadrati sono grigi e 2 neri.
- Sono disposti a formare un quadrato.
- Ogni quadrato tocca due quadrati di colore diverso.
- Il quadrato in alto a sinistra è grigio.

Vediamo se possiamo fare di più. Proviamo a eliminare la terza e la quinta informazione; il nostro elenco diventa:

- Ho 4 quadrati.
- 2 quadrati sono grigi e 2 neri.
- Ogni quadrato tocca due quadrati di colore diverso.

Un bel risparmio, certo. Però ora abbiamo davvero rotto qualche piatto. Chi leggesse questa lista potrebbe infatti sia ricostruire il nostro disegno iniziale sia generare una figura come questa.



Ma su che cosa si basano gli algoritmi di compressione audio? Cioè, come fanno a selezionare le informazioni da "schiacciare"?

La vera bravura dei progettisti entra in campo qui. Questi algoritmi fanno ricorso sia alla fisica sia alla matematica e sono finalizzati a risparmiare più spazio possibile (e poi dicono di noi genovesi...) senza grandi perdite.

La fisica su cui si basano si chiama psico-acustica e, senza dilungarsi troppo (anche se è un argomento davvero affascinante), parte dal presupposto che il nostro orecchio è sensibile alle bande di frequenza delle onde sonore in maniera differenziata. Siccome la voce umana è soprattutto nelle medie frequenze (escludiamo le splendide eccezioni come Maria Callas, Pavarotti ecc.), il nostro orecchio si è evoluto e specializzato per essere più sensibile verso quelle. Significa che distorsioni e "sporcature" che si trovino agli estremi della banda udibile sono più difficili da percepire. Beninteso, possiamo sentire queste frequenze, ma siamo un po' meno efficienti nella loro percezione. Quindi il procedimento che gli algoritmi mettono in atto è tagliare parte delle informazioni contenute in questi estremi banda.

Abbiamo rotto qualche bicchiere? Forse. Ma, se non siete abituati ad ascoltare assolo di contrabbasso, è probabile che non ve ne accorgerete. Inoltre, c'è sempre una parte di informazione inutile che può venire tagliata e poi ricostruita senza nessuna perdita.

Due, dicevamo, sono le categorie in cui si dividono gli algoritmi di compressione: quelli lossless, che comprimono solo questo tipo di informazioni e poi, come dice la parola stessa, ricostruiscono il segnale senza perdita (tra questi ci sono i formati .flac e .ape); e quelli lossy, tra i quali ci sono .mp3, .wma, .aac e l'Ogg Vorbis, interessante in quanto è open source. I lossy fanno perdere un po' della qualità del segnale. Potreste chiedervi allora perché mai usare proprio questi ultimi; la risposta sta nel fatto che un algoritmo los-

sless può avere un rapporto di compressione del 60%, di 1 a 3. In pratica, 300 Mb possono diventare "solo" 100 Mb. Mentre un algoritmo lossy, come l'mp3, arriva fino al 10%, cioè 1 a 10. Gli sciagurati 300 Mb di prima vengono quindi compressi in soli 30 Mb.

Come le sardine nelle scatolette.

Pazzi, pazzi teoremi

Primo teorema di Shannon

Il primo teorema di Shannon (o teorema della codifica di sorgente) è uno dei teoremi fondamentali della teoria dell'informazione, che sta alla base dell'informatica e della trasmissione dei segnali. Questo teorema stabilisce precisamente qual è il limite di compressione di un segnale senza perdere informazione. Ogni messaggio, infatti, contiene una percentuale più o meno alta di informazione "inutile" o, per meglio dire, ridondante. Il limite preciso oltre il quale non andare per evitare la perdita delle informazioni è stabilito da una quantità che si chiama entropia del segnale, anch'essa definita in seno a questo fondamentale teorema.

4

A ME GLI OCCHI, PLEASE

COME VI INCANTA HARRY HOUDINI

4

Sei un prestigiatore, non un mago.
Cutter in The Prestige

Telepatia e aritmetica

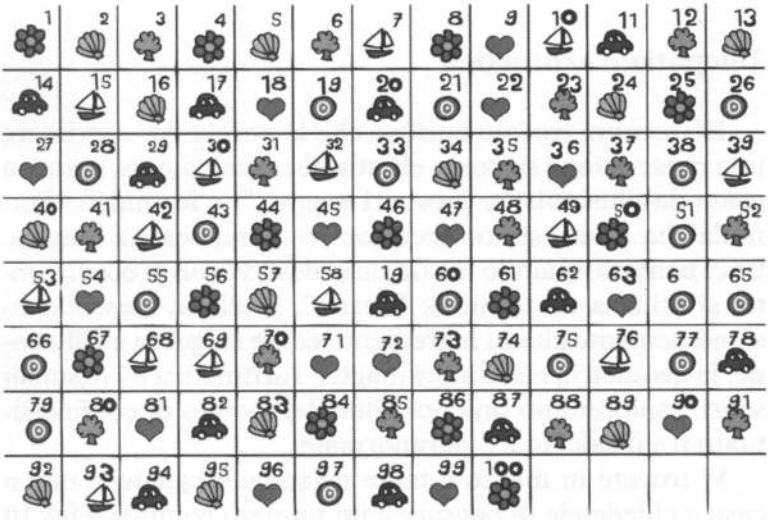
Ho sempre trovato curioso che la parola per esprimere una prescrizione su come effettuare un calcolo sia la stessa usata da illusionisti e presunti maghi. "La formula". "Formula" ha infatti sia un'accezione matematica sia magica. Se ci pensate, quando in cucina si descrive un procedimento, si utilizza un termine, "ricetta". E allora, mescolando sapientemente alcuni ingredienti, come l'algebra e l'illusione, la geometria e i cilindri magici, l'aritmetica e i mantelli scuri, esploreremo una porzione del mondo di confine situato tra il calcolo e il paranormale.

Vi trovate in mezzo a tante persone: sceglietene una a caso e chiedetele di pensare a un numero compreso fra 10 e 100, senza dirvelo. Se credete che la persona abbia una qualche nozione di matematica, dite di pensare a un numero naturale fra 10 e 100. Non si tratta di pignoleria: se qualcuno pensasse a 6,34 o a π, il gioco non funzionerebbe; poi, dicendo così, farete la figura di chi se ne intende un

sacco... A questo punto, ordinate al volontario di compiere le seguenti operazioni:

- Pensare a un numero fra 10 e 100 (per esempio 73).
- Sommare le cifre di cui è composto fino a ottenere una sola cifra (7+3=10, 1+0=1).
- Fare la differenza fra il numero pensato all'inizio e questa ultima cifra (73-1=72).
- Tenere a mente il numero appena ottenuto.

Poi dite al vostro volontario di guardare la tabella qui sotto e di ricordarsi la forma nel quadratino del numero che ha ottenuto.



Ora è arrivato il momento di un po' di teatralità. Potrete spacciarvi per mago, lettore del pensiero, neuro-psico-negromante o armato di raggi X; potrete mettere una mano sulla testa del volontario e fingere di succhiare i suoi pen-

sieri... Insomma, più scene farete meglio è; quando pensate che sia abbastanza, potrete affermare con voluttà che il volontario (o la volontaria) è un romanticone e sta pensando a un cuoricino.

E avrete sempre ragione. Come avete fatto? Andiamo per gradi e costruiamo assieme questo divertente gioco matematico di grande effetto. Quello che vogliamo, il risultato da ottenere per creare un gioco come questo, possiamo raggiungerlo ragionando a ritroso. Noi, i prestigiatori in erba, dobbiamo cambiare il punto di vista e non lasciarci trasportare dall'emotività ("Ohhh, incredibile! Come avrà fatto?"); trovandoci dall'altra parte della barricata, occorre pensare con un pizzico di freddezza in più ("Devo costruire un sistema che mi faccia indovinare").

Questo è il piede giusto con cui partire; e ora, buona volontà, coraggio, ottimismo e intraprendenza.

Dunque, dobbiamo trovare un metodo per fare in modo che, qualunque sia il punto di partenza dei calcoli del nostro volontario, il risultato delle operazioni che facciamo compiere "cada" esattamente nel punto (o nei punti) che vogliamo noi. È proprio quello che tra poco chiameremo un'invariante del sistema.

Le istruzioni non sono state fornite a caso. Possiamo allora provare a ricavare le regole di questo gioco in termini generali. È possibile scrivere ogni numero n di due cifre (una per le decine e una per le unità) come $n=10 \cdot a+b$, dove a è il numero delle decine e b quello delle unità (42, per esempio, sarà composto da 4 decine e 2 unità). E adesso proviamo a ripercorrere le istruzioni date dal sedicente illusionista.

- Pensare un numero: $10a+b$.
- Sommare le cifre di cui è composto: $a+b$.
- Fare la differenza fra il numero pensato e questo ultimo risultato: $(10a+b)-(a+b)$.

Ho messo le parentesi per evidenziare le due parti; e ora svolgiamo qualche operazione.

$$(10 \bullet a+b)-(a+b) = 10 \bullet a+b-a-b = 10 \bullet a-a = 9 \bullet a$$

Vale a dire nove volte la cifra che corrisponde al numero delle decine. Ma il risultato in sé non è così interessante; lo è notare che, qualunque sia la cifra a, il risultato ottenuto alla fine delle manovre dello spettatore è un multiplo di 9!

Dunque sarà sufficiente sistemare lo stesso simbolo su tutti i multipli di 9 della tabella e il gioco è fatto. Provate pure a guardare... Fatto? Bene. Come avrete notato, il simbolo del cuore è su tutti i multipli di 9.

Per gettare l'immancabile fumo negli occhi dello spettatore, il cuore è messo anche in altre caselle; inoltre c'è una grande quantità di simboli che confondono ulteriormente le acque.

Ecco la nostra formula magica, la formula vincente per i trucchi di illusionismo, e anche, perché no, una formula matematica.

Magia, mistero e numeri cominciano a fondersi. E non siamo che all'inizio!

Strano ma vero

Nove contro undici

Il criterio di divisibilità per 3 è solo uno dei tanti. I più noti e facilmente memorizzabili arrivano fino a 11, ma se ne possono trovare senza problemi per qualunque altro numero. Di conseguenza, la famigerata "prova del nove", usata per verificare l'esattezza del risultato di una moltiplicazione, esiste anche per altri numeri. La più famosa tra le concorrenti è appunto la "prova dell'undici". Inoltre, in pochi sanno che la prova del nove esiste in realtà per tutte e quattro le operazioni.

Provaci anche tu

Dimostra che il rinoceronte nero sta in Danimarca!

Chiedi a un amico di compiere le seguenti operazioni:

1. Pensa un numero intero compreso fra 2 e 10.
2. Moltiplicalo per 9.
3. Addiziona la cifra delle decine a quella delle unità.
4. Sottrai 5 al risultato (otterrai un numero composto da una cifra).
5. Pensa a una nazione europea il cui nome italiano inizi con la lettera che nel nostro alfabeto corrisponde alla cifra ottenuta (1=a, 2=b ecc.).
6. Pensa a un colore la cui iniziale sia la terza lettera del nome della nazione.
7. Ultimo passaggio: pensa a un grosso mammifero il cui nome inizi con la terza lettera del nome del colore.

Ora tocca a te. Un po' di pathos e, grazie a una miracolosa trasmissione del pensiero, gli riconoscerai una fervida fantasia dal momento che ha pensato a un RINOCERONTE NERO in DANIMARCA!

Un nuovo gioco di magia?

Creare un gioco di magia matematica non è difficile ed è molto divertente, specie se in compagnia. Basta conoscere una qualsiasi proprietà di regolarità matematica e avere un po' di fantasia. Per "qualsiasi proprietà" intendo una quantità che si conserva, per esempio quella che abbiamo già chiamato un'invariante di un sistema. Una delle proprietà matematiche più usate nei giochi di magia, soprattutto in quelli di mentalismo, è quella di parità, la proprietà che regola il fatto di essere pari o dispari di certi numeri. Tutti sappiamo come fare a distinguere queste due classi di nu- meri: quelli pari sono multipli di 2, mentre quelli dispari sono quelli compresi fra un multiplo e l'altro (si possono

anche definire come i multipli di 2, più 1). Prendendo in esame la somma, è facile accorgersi di quali siano le regole di parità. Basta provare.

- Somma pari + pari = pari (6+6=12)
- Somma dispari + dispari = pari (3+3=6)
- Somma pari + dispari e dispari + pari = dispari (5+2=7)

Quindi potreste inventare un gioco di magia in cui fate compiere una serie di calcoli al volontario e alla fine indovinate se il numero che ha in mente è pari o dispari, usando le regole appena esposte.

Ho provato anche io a immaginare un gioco. Spero non l'abbia già inventato nessun altro ma, anche se così fosse, non è il gioco in sé che conta, quanto il divertimento nel crearlo e la soddisfazione nel vedere che funziona. Si basa su una proprietà: la caratteristica di Eulero. La prima volta che incontrai questo teorema mi sembrò esso stesso una magia, perché stabilisce una regola valida per tutta una categoria di forme geometriche. Per usare un'espressione di un mio amico fisico (gli chiesi di illustrarmi un difficile argomento di fisica delle particelle elementari), non è una strada lastricata d'oro!

La caratteristica di Eulero è stata studiata inizialmente per essere applicata ai poliedri e una parte fondamentale fu sviluppata dal matematico Eulero. Questa caratteristica è un numero intero che caratterizza alcune proprietà di una forma geometrica o, più precisamente, di uno spazio topologico. Si denota con una lettera greca simpaticissima, la "chi" X, usata anche per la classificazione dei solidi platonici. Il risultato straordinario cui si è giunti riguarda i poliedri. I poliedri sono per lo spazio quello che sono i poligoni per il piano. Mentre un poligono è una figura piana formata da una linea spezzata chiusa, un poliedro è un solido

formato da un certo numero di facce. Preso un qualsiasi poliedro, con un numero di facce che chiamiamo F, un numero di spigoli S e un numero di vertici V, vale sempre la seguente regola.

$$X= V - S + F$$

Questo significa che, presa una qualunque forma poliedrica nello spazio, e contando spigoli, vertici e facce e mettendoli assieme come abbiamo visto, viene sempre lo stesso numero. Sempre.

La relazione di Eulero dice che per i poliedri "senza buchi" quel numero di sopra è uguale a 2. Sempre. Provare per credere. Prendiamo per esempio i solidi platonici, cioè i solidi costruiti da facce, le quali sono a loro volta poligoni regolari, e vediamo cosa succede.

	Nome	V (vertici)	S (spigoli)	F (facce)	X
	Tetraedro	4	6	4	2
	Esaedro	8	12	6	2
	Ottaedro	6	12	8	2
	Dodecaedro	20	30	12	2
	Icosaedro	12	30	20	2

Alcune delle forme che avete appena visto hanno il vantaggio di avere le facce tutte uguali; quindi, detto in termini di probabilità, tutte le facce sono equiprobabili. Per questo motivo alcuni dadi speciali per giocare a determinati giochi di società hanno queste forme.

Potreste divertirvi a provare con altri solidi di vostra invenzione, magari fatti con la carta, seguendo gli insegnamenti dell'arte dell'origami, e poi cercare di calcolare la caratteristica di Eulero.

Ma torniamo al gioco di magia. Questa è quella che si chiama un'invariante, una quantità che rimane costante dentro una classe di oggetti in cui possiamo far muovere il nostro volontario. Potremmo costruire il "trucco" grazie all'uso di quel fantastico gioco che andava in voga qualche tempo fa, il Geomag.

I kit di Geomag permettono di creare poliedri nello spazio grazie alla composizione di due elementi fondamentali: stanghette magnetizzate e piccole sfere d'acciaio. Le stanghette rappresentano gli spigoli delle costruzioni e le sferette gli angoli e fungono come snodo a 360°. Se abbiamo un kit di Geomag, possiamo chiedere al volontario di costruire un solido come meglio crede. Poi possiamo sbizzarrirci e inventare quello che vogliamo fare. Ecco due proposte.

Proposta 1 : indoviniamo un numero pensato.
Chiediamo di fare quanto segue:

- Pensare a un numero intero qualsiasi senza dirlo a nessuno. Chiameremo questo numero "P".
- Contare facce, spigoli e vertici del poliedro che ha costruito.
- Chiediamo di prendere il numero di vertici, sottrarre il numero di spigoli, sommare il numero pensato e infine sommare il numero di facce.
- Ci facciamo dire il risultato, che chiamiamo qui "R".

A questo punto indoviniamo il numero pensato. Come? Abbiamo chiesto al volontario di calcolare V-S+P+F=R ma noi sappiamo che V-S+F=2, quindi 2+P=R, da cui:

$$P=R-2$$

È dunque sufficiente sottrarre 2 al numero che ci ha detto il volontario e indovineremo sempre. I nostri conti sono molto semplici, ma il gioco è ben mascherato dai calcoli e conteggi che deve effettuare il volontario.

Proposta 2: indoviniamo le facce del solido.
Chiediamo di fare quanto segue:

- Pensare a un numero intero qualsiasi senza dirlo a nessuno.
- Contare facce e vertici del poliedro che ha costruito.
- Prendere il numero di vertici, sommare il numero delle facce, e farci dire il totale.

A questo punto possiamo rivelare qual è il numero delle facce.

Questo gioco è simile al precedente: basta prendere il numero che ci ha detto il volontario e sommare 2 per ottenere il risultato. Provate a fare i passaggi necessari per arrivare a questo risultato!

Come liberarsi dalle manette

Esistono molte branche dei giochi di magia e altrettante sono le figure coinvolte: prestigiatori, illusionisti, mentalisti; i nomi delle varie discipline sono altrettanto fantasiosi: prestidigitazione, cartomagia, fachirismo ecc.

Bisogna stare molto attenti a non confondere chi fa giochi di illusionismo con chi si spaccia per veggente, mago,

cartomante, occultista e così via. I prestigiatori mascherano spesso i loro numeri con un alone di mistero, che serve solo a creare l'atmosfera.

Ci sono addirittura interi rami dell'illusionismo che sono la risposta "razionale" al paranormale: per esempio, il già citato mentalismo simula l'uso di poteri paranormali (è il caso della lettura del pensiero): tutto ciò aumenta la tensione in sala e di conseguenza lo stupore e l'emozione nel pubblico. Chi fa questo per mestiere si considera più che altro una persona di spettacolo e ammette senza problemi che sotto i suoi numeri si nasconde un trucco. Ovviamente si guarderà bene dallo svelarlo: molti illusionisti si sono portati i loro segreti nella tomba.

Chi è impegnato nella fabbricazione di giochi di prestigio può avvalersi di un gran numero di discipline: sono i suoi arnesi del mestiere. Anche per questo motivo certi numeri hanno successo: raramente una persona nel pubblico avrà una conoscenza approfondita di tutte queste materie, e quindi sarà più difficile capire il meccanismo dietro a un'esibizione. Queste discipline sono la psicologia (pensate alla capacità di usare il proprio carisma e di catturare l'attenzione della platea), l'ottica, l'illuminotecnica, l'abilità con le serrature, la chimica, l'idraulica, l'ingegneria meccanica ed elettrica e, last but not least, la matematica, miei cari!

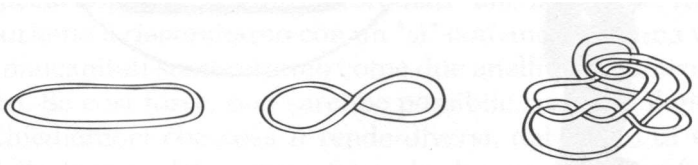
Uno degli ambiti più famosi dell'illusionismo è l'escapologia, che significa "scienza della fuga" (dal verbo inglese to escape, "scappare, fuggire"). È quella branca dell'illusionismo che si occupa di evasioni in ogni senso, sia che si tratti di liberarsi da un paio di manette (o da catene, da una camicia di forza) sia di scappare da prigioni, segrete e altri ambienti chiusi. Spesso i numeri vengono resi più spettacolari attraverso la messa in scena di situazioni rischiose: l'escapologo potrebbe essere immerso nell'acqua, stare in equilibrio a decine di metri di altezza, appeso a testa

in giù e via dicendo. Per riuscire in questo genere di imprese è necessario, oltre alle competenze già menzionate, avere una profonda conoscenza del proprio corpo (e dei suoi limiti) e avere una preparazione fisica adeguata.

Senza dubbio, il più famoso illusionista a cimentarsi in queste spettacolari fughe, entrato nella leggenda, fu Harry Houdini (1874-1926), pseudonimo di Ehrich Weisz. I suoi spettacoli rimasero a lungo ineguagliati per complessità e spettacolarità.

Torniamo a noi. C'è un importante ramo della matematica, nato di recente, che si può applicare con ottimi risultati ai giochi di magia, in particolare di escapologia. Si tratta della teoria dei nodi, che è una parte della più generale e importante topologia.

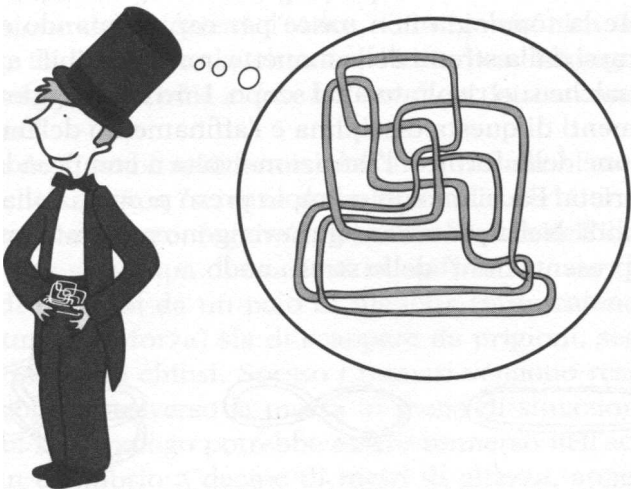
La topologia traduce in termini matematici problemi riguardanti le proprietà delle figure e delle forme che non cambiano quando viene effettuata una deformazione senza "strappi", "sovrapposizioni" o "incollature". Per essere un buon topologo, è necessario avere ben chiari i concetti di spazio topologico, funzione continua e omeomorfismo per giocare abilmente con questa parte della geometria. Ovviamente la topologia non nasce per capire quando e come liberarsi dalla stretta delle manette, ma è possibile applicare qualche suo risultato a tal scopo. Uno dei maggiori insegnamenti di questa disciplina è l'affinamento dell'immaginazione delle forme e l'astrazione volta a comprenderne le proprietà. Facciamo un esempio preso proprio dalla teoria dei nodi. Nella prossima figura vengono mostrate tre diverse "presentazioni" dello stesso nodo.



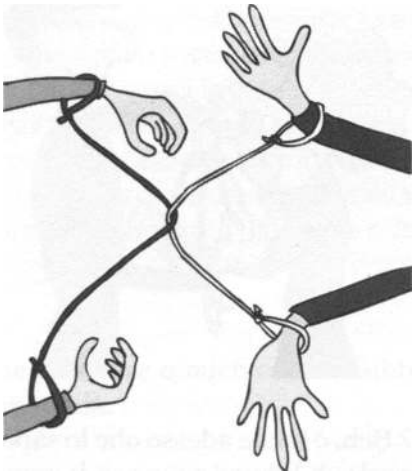
Deformando le figure senza mai strapparle, incollarle oppure sovrapporle, si ottiene che i tre nodi in figura sono equivalenti.

Perciò, dovendo risolvere alcuni problemi con uno spazio come quello più a destra, è possibile ricondursi a quello più semplice al centro, o meglio ancora a sinistra, risolvere il problema e poi "ingarbugliare" la soluzione. Un po' come se volessimo dipingere una sola faccia di un foglio tutto accartocciato. È molto più semplice appianarlo, dipingerlo e poi accartocciarlo di nuovo piuttosto che far vibrare il pennello nelle spiegazzature. La topologia studia anche quando è possibile fare questo "cambio di mondo" e quali problemi possono godere di questo beneficio.

Complicare la vita è spesso più facile che semplificarla; e anche il nodo della prossima figura è equivalente a quelli sopra. Il suo inventore è il matematico Thistlethwaite e direi che ha decisamente vinto il premio di aggrovigliamento topologico. Spero che non voglia mai fare il pescatore, non ha certo buone credenziali per essere messo a lavorare con le reti!



Passiamo ora al nostro gioco di escapologia. A due persone vengono messe speciali manette come quelle in figura. Ognuno alla fine del gioco dovrà tornare a essere con le proprie come nella prima figura, separato dall'altro, ma i due cominciano il gioco come nella seconda figura, che si trova alla pagina seguente. L'obiettivo, abbastanza scontato, è di liberarsi dalla concatenazione del compagno senza mai togliersi il braccialetto dal polso.



Tra le altre cose, questo gioco è divertentissimo perché le persone coinvolte generalmente cominciano a contorcersi come i migliori e più consumati ballerini di salsa e merengue.

Ma torniamo ai due ammanettati. Prima domanda cui rispondere: è possibile sciogliersi? Molti se lo chiedono, specie dopo che si sono "attorcinati" ancora un po'. Rassicuriamo e rispondiamo con un "sì" convinto. A prima vista i malcapitati sembreranno come due anelli uno dentro l'altro. Se così fosse, non sarebbe possibile risolvere il gioco. Chiediamoci che cosa li rende diversi, dal punto di vista della forma, dal sistema fatto da due anelli.

Guardando bene, ci si accorge che c'è un piccolo spazio fra il polso e il braccialetto della manetta.

Oltre alla non deprecabile qualità di consentire il passaggio del flusso sanguigno, questo spazio rende il sistema "scioglibile". Anzi, un bravo matematico vi direbbe che i due sono già sciolti, sono solo un po'... sovrapposti.

Usandolo, è possibile liberarsi seguendo i passi della figura qui sotto.

Facile vero? Beh, è facile adesso che lo sapete, ma, se avete avuto il coraggio di legarvi prima di leggere la soluzione, qualche piccolo brivido l'avete provato. Questo accade sia perché il nostro cervello fa molta più fatica a elaborare informazioni a mano a mano che crescono le dimensioni, sia perché a volte al crescere delle dimensioni le cose in matematica si complicano davvero in maniera perversa. Credete che sia solo accademia? Che non servirà davvero a nessuno? E allora pensate a quante volte, con l'iPod o il Walkman in tasca e gli auricolari nelle orecchie vi siete messi una borsa a tracolla e vi siete trovati... attorcinati.

Prima di morire, Houdini disse: "Se è veramente possibile a tutti tornare dall'aldilà, Harry Houdini lo farà". Il fatto che, malgrado la sua bravura, non sembra esserci riuscito,

Strano ma vero

Chi è un mago per davvero?

Oggi nel nostro Paese direi a occhi chiusi il CICAP, ma mi preme ricordare il mago Harry Houdini che nel secolo scorso fece di tutto per combattere presunti maghi, medium e parapsicologi. Chi infatti avrebbe potuto disporre di abilità e conoscenze nelle arti dell'illusionismo maggiori di lui?

All'epoca scienziati e studiosi non sempre erano in grado di dimostrare la fallacia di trucchi banali per il maestro. Così si realizzò una sorta di sodalizio tra Houdini e l'autorevole rivista scientifica Scientific American. Il mago fece parte a lungo di un comitato che istituì un premio in denaro per chiunque dimostrasse capacità soprannaturali. La rivista godette così tanto della "difesa" di Houdini che il premio non venne mai consegnato.

Se fosse ancora vivo, Houdini andrebbe molto d'accordo con James Randi e Penn & Teller che oggi perseguono la stessa missione, chi a scopo illuministico con una vera e propria fondazione, chi nell'ambito dello spettacolo.

potrebbe generare qualche serio dubbio sulla stessa esistenza di un aldilà.

Provaci anche tu

Provateci!

E allora, dopo questa breve introduzione a un'arte che è un misto di conoscenze matematiche e di altra natura, invito tutti a cimentarsi in quei giochi che si trovano ancora in certi negozi di giocattoli con i nomi di puzzle 3D, rompicapo ecc. Sperimenterete livelli di complessità diversi, ma i principi su cui si basano sono sempre gli stessi. Quindi occhi aperti e buon divertimento! Per cominciare potreste indossare un gilet sotto la giacca e a provare a sfilarvelo senza togliervi la giacca.

Un esercizio di topologia... sartoriale.

Carte... magiche

Spesso l'arte dell'illusione viene veicolata da parole strane. Una di queste è prestidigitazione.

La prestidigitazione è l'arte che crea illusioni grazie alla destrezza delle mani. L'abilità del prestidigitatore consiste nel non far vedere il trucco agli astanti e sbalordire i presenti con i suoi prestigi (in latino, praestigia significa appunto "inganno, illusione").

I giochi di magia forse più noti sono quelli con le carte, con le quali si possono fare trucchi di illusionismo (cioè farle sparire e riapparire in mano, nella tasca di uno spettatore...), oppure basati su calcoli matematici.

È anche possibile fabbricarsi il proprio mazzo di carte magiche per stupire grandi e piccini. I giochi di magia basati su regole matematiche sfruttano un teorema, una proprietà numerica e si aggrappano a qualsiasi cosa possa rivelarsi utile per predire un risultato.

Abbiamo visto nel capitolo precedente (quello dedicato al computer) come scrivere un numero qualunque come somma di potenze di 2, ricordate?

Bene, ora terremo in considerazione questa proprietà matematica e il fatto che esiste una corrispondenza biunivoca tra somma non ripetuta di potenze di 2 e numeri naturali.

Troppo difficile?

Intendo dire che, dato un numero, lo posso scrivere in un solo modo come somma di potenze di 2 (senza ripetere mai gli addendi); inoltre, dato un insieme di potenze di 2, queste andranno a costruire, attraverso l'operazione di somma non ripetuta, un unico numero.

Qualcuno chiama questa proprietà "corrispondenza one-to-one".

Diamo un'occhiata alla tabella di scomposizione dei numeri fino a 31.

	a	b	c	d	e
1	1				
2		2			
3	1	2			
4			4		
5	1		4		
6		2	4		
7	1	2	4		
8				8	
9	1			8	
10		2		8	
11	1	2		8	
12			4	8	
13	1		4	8	
14		2	4	8	
15	1	2	4	8	
16					16
17	1				16
18		2			16
19	1	2			16
20			4		16
21	1		4		16
22		2	4		16
23	1	2	4		16
24				8	16
25	1			8	16
26		2		8	16
27	1	2		8	16
28			4	8	16
29	1		4	8	16
30		2	4	8	16
31	1	2	4	8	16

E adesso, come fosse un gioco a incastro, andiamo a costruire il nostro mazzo di carte. Raggruppiamo i numeri da 1 a 30 secondo gli addendi di cui hanno avuto bisogno. Per esempio, per costruire il 5 abbiamo avuto bisogno delle basi 4 e 1, per il 12 abbiamo usato base 8 e 4. Dunque 5 e 12 hanno in comune solo la base 4. Abbiamo detto che gli addendi base sono le potenze di 2; per arrivare fino a 30 abbiamo avuto bisogno di cinque potenze di 2 (1, 2, 4, 8, e 16); quindi possiamo indicare i cinque gruppi con la potenza di 2 associata. Ogni numero da 1 a 30, come si può vedere dalla tabella, avrà una "mappatura" in termini di potenze di 2. La biunivocità - cioè il fatto che, data una scomposizione, c'è un solo numero che è associato e viceversa - la si può controllare anche a occhio. Abbiamo dunque cinque gruppi, ognuno corrispondente a una potenza di 2; allora perché non scrivere questi cinque gruppi su cinque cartoncini? Ecco il risultato:

1	3	5	7	9
11	13	15	17	19
21	23	25	27	29

2	3	6	7	10
11	14	15	18	19
22	23	26	27	30

4	5	6	7	12
13	14	15	20	21
22	23	28	29	30

8	9	10	11	12
13	14	15	24	25
26	27	28	29	30

16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30

Abbiamo detto che, data una scomposizione, questa ricostruisce univocamente il numero come somma non ripetuta. Benissimo, ma una scomposizione altro non è che una combinazione di carte. Per esempio prendiamo il numero 12. Come si può vedere dalla tabella, si costruisce come 8+4. E infatti, grazie al nostro raggruppamento, compare nella carta dove la base è 8 e dove la base è 4. E adesso, lavorando un po' di fantasia, sarà semplice costruire (o ricostruire)

un gioco di magia. Prendete un volontario e chiedetegli di pensare a un numero senza dirlo a nessuno. Potete anche domandargli di scriverlo su un foglio e di metterlo dentro una busta da consegnare a una persona di fiducia, un altro volontario del pubblico. Intanto potreste persino farvi bendare. E ora chiedete al volontario di rispondere soltanto di sì quando gli mostrate una carta nella quale il suo numero è presente, senza fornire il minimo indizio. Sapere dove vede il numero pensato per noi è già un'indicazione più che sufficiente: basterà ricordarsi quali sono le basi associate alle carte "sì" e sommarle tra loro. Grazie alla univoca rappresentazione dei numeri come somma di potenze di 2, la somma ci restituirà il numero pensato: provare per credere!

Questo gioco può essere proposto in qualsiasi momento; se lo fate a una sola persona, non c'è bisogno di fogli e penne. Inoltre si presta a fare un bel po' di matematica interessante.

Anche se la matematica su cui si fonda questo gioco ha a che vedere con il computer e la numerazione in base 2, il principio su cui si basa è in realtà molto antico: ne esiste una versione su un testo di giochi matematici a cura di Pellegrino Tosatti di Sorbara del 1878, esattamente cento anni prima della mia nascita.

Provaci anche tu

Estendiamo!

Ora che conoscete le regole per costruire le carte e per arrivare al numero che volete, costruite da soli le carte fino ad arrivare a sei carte o perfino a sette. Ovviamente, quante più carte si esibiscono maggiore sarà lo stupore del pubblico quando indovinerete.

5

HOME SWEET HOME

CURIOSANDO CON LA MAMMA (...E ANCHE CON LA NONNA)

5

Il caffè, per esser buono, deve essere nero come la notte, dolce come l'amore e caldo come l'inferno.

Michail Bakunin

Un matematico è una macchina che converte caffè in teoremi.

attribuita a Paul Erdòs

Rigate e rigatoni

La Natura fa il minor sforzo possibile.

Me lo sentivo ripetere spesso alle lezioni di fisica, un principio che è echeggiato dai muri del liceo alle vetrate dell'università come un mantra da ripetere con fiducia.

La Natura si guadagnò subito la mia simpatia.

Poi scoprii che questo principio si può chiamare con dovizia di lessico "principio di minima azione"; sapeva tanto di "massimo risultato con il minimo sforzo", una filosofia di certo interessante in determinati frangenti.

Uno dei primi casi in cui è possibile sperimentare questo principio è quando osserviamo la forza di gravità. Ci si accorge subito che è molto più difficile che un oggetto fluttui nell'aria piuttosto che cada per terra; ma ci sono molti altri casi interessanti, per esempio quello di alcune forme geometriche.

Penso alla catenaria, cioè la figura che forma una catena quando viene appesa alle due estremità. La formula che

la definisce si ottiene applicando il principio di minima azione a un corpo pesante unidimensionale. Una catena, appunto, può essere tradotta matematicamente in questo modo. Però questa formula serve per moltissime altre cose: per la propagazione della luce, per descrivere la forma dell'arcobaleno, o in architettura (la cupola di St. Paul a Londra ha questa forma). Pensate che fu Galileo Galilei a occuparsi per primo di questa curva; era convinto che la forma che descrive una fune appesa fosse una parabola, ma si sbagliava: la Natura aveva fatto un po' di sforzo in più rispetto al minimo necessario.

Anche in cucina possiamo trovare una forma significativa che si genera grazie alla forza di gravità. Mentre la Natura compie il minimo sforzo necessario, noi ne facciamo spesso molti di più e, per ricaricarci, potremmo aver voglia di un bel piatto di pasta.

Ce n'è per tutti i gusti: lasagne, lasagne ricce, fettuccine, tagliatelle, quadrucci o quadretti, taglierini, celentani, pappardelle, tonnarelli o sagne, peperini, zite, maccheroni, bucatini, vermicelli o spaghetti o capellini, cannelloni da ripieno, rigatoni o tortiglioni o sedani, mezze maniche, fusilli, maltagliati, farfalle, lumache, conchiglie, ditali o cannolicchi, ravioli, agnolotti, cappelletti, tortellini o tortelli. L'elenco potrebbe proseguire.

A me però interessa la mia pasta preferita: gli spaghetti! Gli spaghetti non vanno mai rotti, vanno messi in pentola interi. Spesso vediamo fare, specie in televisione, un piccolo gesto di destrezza: gli spaghetti vengono tenuti in pugno, infilati nella pentola al centro e poi lasciati andare di colpo. A quel punto, si aprono come un fiore e si crea in modo repentino una forma che potrebbe richiamare alla memoria un abat-jour. Il gesto ricorda molto da vicino l'inizio del gioco cinese dello Shangai: su un piano si buttano dei bastoncini che devono venire raccolti uno per uno senza muovere gli altri. La superficie che appare porta un nome

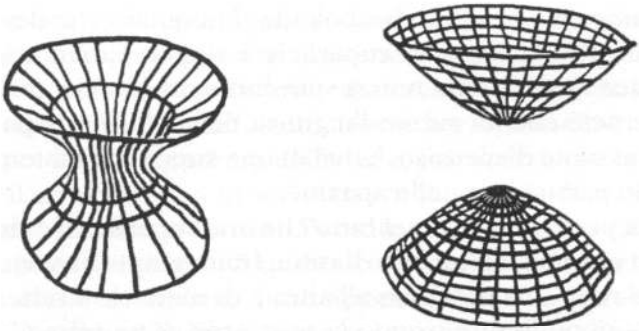
abbastanza strambo: iperboloide. Ma quello che deve colpirci qui è che questa superficie è rigata. I maniaci della vernice metallizzata non si spaventino: non si tratta di una superficie che ha subito l'ingiuria della chiave da parte di un passante dispettoso, bensì di una superficie matematica molto particolare nello spazio.

La peculiarità sta nel fatto che una superficie come questa si ottiene dall'unione di rette. Immaginate di avvicinare tante rette una di fianco all'altra e di metterle strette strette. Se non alterate troppo la posizione di un retta rispetto a quella vicina, otterrete una superficie che piano piano ruota su se stessa.

Ci sono alcuni esempi facili da visualizzare; il più facile di tutti è il piano. Il piano può essere pensato come una superficie rigata, come un'unione di rette parallele adiacenti. Altri esempi comuni sono il cono e il cilindro.

Possiamo pensare a una superficie di questo tipo immaginando il modo in cui si costruisce. Pensiamo una retta (be', meglio un segmento, visto che non è infinitamente lungo) che si muove in una camera piena di nebbia e la taglia di netto. La traccia che lascia è una superficie rigata.

Come potete immaginare, di superfici rigate ce ne possono essere davvero tante, ma la cosa rilevante è che anche buttando gli spaghetti in pentola se ne forma una. Con il metodo della "camera a nebbia", visualizzate una retta che si mette in piedi e si muove lungo una circonferenza, in tondo. Dopo un po', tornerebbe sui suoi passi e avrebbe formato un cilindro. Adesso fatela ripartire, ma invece di pensarla ritta in piedi, pensate che si sia stancata e che si inclini un po' da un lato. Nel momento in cui ritorna sui suoi passi, il risultato sarà un iperboloide. Se la nostra retta non era molto stanca, e la sua inclinazione rimane contenuta entro 45°, l'iperboloide sarà a una falda, altrimenti si formeranno due falde staccate (e l'iperboloide sarà appunto a due falde).



Strano ma vero

Iperboloidi tutti da abitare

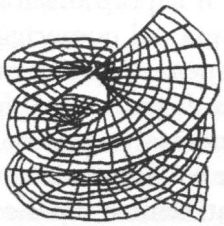
Gli iperboloidi non sono soltanto mera teoria. Sono anche strutture architettoniche reali, spesso imponenti, come le torri.

Il primo iperboloide architettonico al mondo fu costruito dall'ingegnere russo Vladimir Shukhov per un'esposizione russa del 1896. Strutture iperboloidi furono progettate in seguito da grandi architetti, tra cui Gaudí, Le Corbusier, Niemeyer.

Gaudí e Shukhov portarono avanti i loro esperimenti quasi simultaneamente, nel periodo compreso tra il 1880 e il 1895. In particolare, Gaudí si dedicò allo studio di elementi a forma di paraboloide iperbolico (hypar) e di iperboloide di rivoluzione nel suo lavoro più ambizioso: la Sagrada Família (1910).

Un'altra rigata curiosa è l'elicoide, che è la curva che si ottiene immaginando di muovere una retta in direzione perpendicolare a essa e, al tempo stesso, ruotarla attorno a un asse sempre ortogonale. Quello che ne risulta ricorda molto la struttura del dna. L'elicoide è una forma che trova anch'essa uso in architettura: le rampe dei parcheggi che si avvitano su loro stesse si chiamano "elicoidali" proprio per questo motivo.

Ma non basta. Sarà forse un caso, ma l'elicoide ricorda molto da vicino la forma dei... fusilli, secondo me ottimi con il sugo al tonno. E se anche noi in questa piccola ricerca vogliamo fare come la Natura, cioè il minimo sforzo possibile, per trovare le rigate nella pasta è sufficiente sentire il profumo del loro nome e ci potrebbero venire in mente... già, proprio i rigatoni, i quali, avendo la forma di un cilindro, hanno tutti i titoli per essere una rigata.



Pazzi, pazzi teoremi

Mille bolle blu

Sempre a proposito del minimo sforzo, in geometria esistono superfici che si chiamano "superfici minime" che sono, appunto, le superfici più piccole possibile a parità di altre condizioni, per esempio il volume.

Volete qualche esempio? Prendete un piccolo telaio di una qualunque forma chiusa e immergetelo nell'acqua e sapone; estraetelo e avrete sotto gli occhi una superficie minima perché la lamina di sapone generata è una superficie dalla curvatura media nulla ovunque.

Soffiando, potremmo creare bellissime bolle di sapone. Esiste un teorema che riguarda anche le nostre amiche rigate e dice che le uniche superfici minime a essere rigate sono il piano e l'elicoide. In altre parole, non riuscirete a creare lamine di sapone di forme diverse da queste e unioni di queste. Questo genere di problemi è molto antico: secondo alcune fonti, fu Archimede a introdurre per primo in geometria i concetti di lunghezza e area minima.

Giovedì, serata toast!

Quando ero bambino, non vedevo l'ora che arrivasse il giovedì. Assieme alla mia famiglia piazzavamo il tostapane al centro del tavolo e ci mettevamo a sfornare toast a ripetizione da mangiare in compagnia mentre cucinavamo. Ho davvero un bellissimo ricordo di quelle serate e ogni tanto, teneramente, ci ripenso. Io adoro i toast.

Ripenso anche che spesso cominciavo a pregustarmi la serata, ad assaporare il sapore del formaggio filante sulla punta della lingua, già dal pomeriggio accompagnando mia mamma a fare la spesa. Compravamo sempre lo stesso quantitativo di pacchi di pan carré, fette di prosciutto e sottilette. E poi cominciava la giostra dei toast: venivano sfornati due alla volta e i due fortunati del momento potevano affondare i denti dentro il pane croccante e trovare saporito formaggio e gustoso prosciutto cotto. Alla fine di questa scorpacciata, però, avanzava sempre qualcosa. Magari un ultimo toast veniva fatto solo con il formaggio e poi diviso fra i più golosi, oppure il giorno dopo veniva usato il pane in eccedenza per altre ricette. Ricordo che mi chiesi come avremmo potuto non far avanzare niente, come finire contemporaneamente tutti i pacchetti. E ovviamente cominciai a fare i calcoli necessari.

Il pacco di pan carré conteneva 16 fette, quello delle sottilette 15 e il prosciutto 8 fette per confezione. Noi all'epoca eravamo in quattro: con 16 fette di pan carré venivano fuori due toast a testa (ma poi mia madre ci cedeva un boccone del suo secondo toast). Ovviamente, mentre il prosciutto era "contato", le sottilette avanzavano. Per finirle sarebbe stato necessario cucinare 15 toast, oppure raddoppiare il formaggio nei toast, tranne che per uno. Ma questi conti non erano sempre così ben determinati: le confezioni cambiavano spesso e soprattutto c'erano le maledette offerte promozionali che sfalsavano tutto.

Al di là della curiosità, mi accorsi che il metodo giusto per ottenere dalla matematica le risposte che cercavo stava in qualcosa che avevo fatto proprio a scuola qualche tempo prima: il minimo comune multiplo, per gli amici m.c.m. Mi accorsi solo molti anni dopo, che leggendo con attenzione il nome di questo strano animale matematico, si può capire perfettamente il suo significato. Quasi nessuno lo fa.

Proviamoci adesso: fate molta attenzione a ciascuna parola.

Minimo. Comune. Multiplo.

Di nuovo.

Minimo. Comune. Multiplo.

Quello che mi serviva per sapere quali pacchetti comprare in modo da non fare avanzare niente stava in quelle tre parole accostate fra loro che, come i tre ingredienti dei toast, già da sole sono interessanti, ma messe assieme assumono un sapore prelibato. Il minimo comune multiplo, e il metodo per calcolarlo, torna utile per sapere quanti pacchetti di ciascun ingrediente dovremmo comprare per non lasciare niente di troppo in frigo. Infatti ci aiuta a calcolare quale numero è multiplo al tempo stesso del numero di fette, ehm, di oggetti di determinati insiemi. Un po' come voler costruire un muro fatto da tre parti che lo dividono verticalmente con tre mattoni diversi; e per di più volere che arrivino alla sommità insieme, senza sbavature. Se un mattone è più corto dell'altro, allora dobbiamo mettere più mattoni in modo che compensino rispetto agli altri. Ma quanti di più?

Possiamo pensare che ogni numero intero sia costruito a partire da mattoni fondamentali combinati in un modo che sta a noi decidere. Potremmo usare l'addizione, e dire che il numero 4 si può costruire come 2+2, come 3+1 ecc.; potremmo anche stabilire che ogni numero si costruisce come "il numero precedente +1". Quindi possiamo affermare che il mattone fondamentale è l'1 il quale, sommato

con se stesso un certo numero di volte, ci restituisce qualsiasi numero intero.

Possiamo usare anche la moltiplicazione; e qui le cose si fanno interessanti. Per esempio, il numero 13 non è edificabile a partire da nessun altro numero più fondamentale con la moltiplicazione. E questo non perché il 13 porti male, bensì perché è un numero primo: come sapete, i numeri primi non hanno nessun divisore intero a parte loro stessi e l'unità. In altre parole, se ne abbiamo tra le mani uno, non possiamo dividerlo per nessun altro numero, a parte se stesso e 1, senza ottenere un risultato "con la virgola".

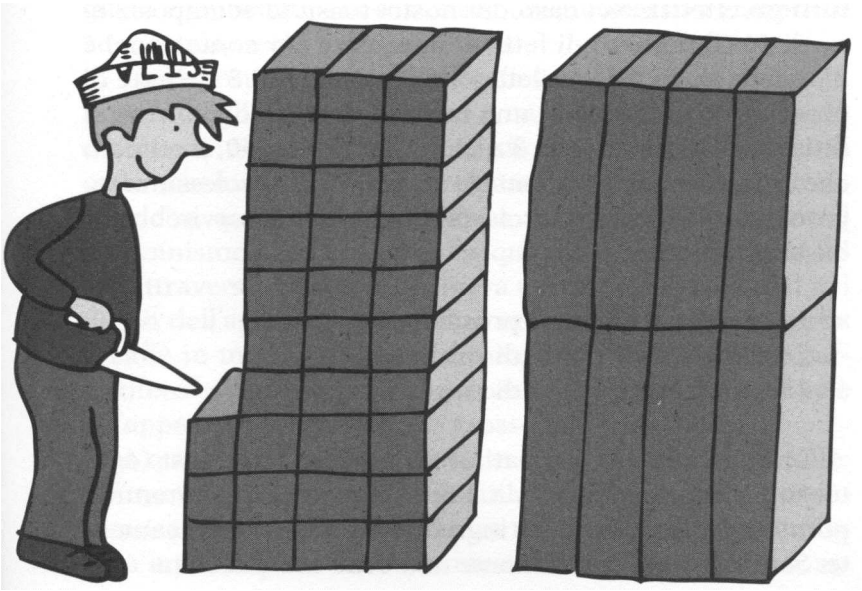
Ricordo la scena di un film visto qualche tempo fa in cui una maestra scriveva una serie di numeri alla lavagna; tra questi c'erano anche numeri primi. La maestra chiese: "Quali di questi numeri si possono dividere per 2?" Il bambino geniale, protagonista della pellicola, alzò la mano e rispose: "Tutti!" E aveva ragione. Non è che 13 non si possa dividere per due, solo che il risultato cade in cesto diverso da quello da cui abbiamo pescato il 13. Il risultato è 6,5, che è un numero razionale, non intero.

Detto questo, potremmo divertirci a vedere quali sono i mattoni fondamentali con cui sono costruiti determinati numeri che ci circondano, come il numero dell'autobus che passa sotto casa o il numero degli anni di nostro figlio. Come fare? Semplice, quello che stiamo cercando è una scomposizione in fattori primi. Prendiamo un numero, per esempio 45, e cominciamo a vedere per cosa possiamo dividerlo in modo che il risultato sia un numero intero (virgole vietate!). L'idea è anche quella di cercare di dividerlo per numeri piccoli che non siano a loro volta divisibili ulteriormente. Dobbiamo cercare dei mattoni fondamentali, dei veri e propri atomi (come intendevano la parola gli antichi filosofi greci) indivisibili. E allora potremmo pensare di dividere 45 per 5 e otterremo 9. A sua volta, 9 è divisibile

per 3, e otteniamo 3, il quale può essere diviso solo per se stesso o per 1. Gli atomi che compongono 45 sono dunque 5 e 3 moltiplicato due volte, cioè 32.

E ora torniamo al nostro problema. Stiamo cercando di costruire un muro della stessa altezza con mattoni diversi. Abbiamo capito come trovare la lunghezza dei mattoni fondamentali di ciascun numero e ora dobbiamo metterle insieme. Ciò si ottiene facendo l'unione delle scomposizioni: dovremmo quindi prendere tutti i fattori primi che compaiono nelle scomposizioni e anche al loro massimo esponente, in modo che le composizioni con esponente maggiore in qualche modo comprendano quelle con esponente minore.

Facciamo un esempio. Oltre al 45 già "sminuzzato", scomponiamo anche il 21. È presto detto: possiamo dividere 21 per 3 e otteniamo 7, che è a sua volta numero primo. Quindi i mattoni fondamentali di 21 sono 7 e 3. Se quindi



volessimo trovare il minimo comune multiplo di 45 e 21, dovremmo costruirlo con 5, 7 e 3 (ma alla seconda potenza, ovvero 32, dato che nella scomposizione del 45 compare così). Quindi mettiamo assieme questi mattoni fondamentali e verrà fuori... l'altezza del muro! Moltiplicando 5, 7 e 9 otteniamo 315. Possiamo essere sicuri che 315 è divisibile per i fattori primi che lo compongono ovvero 5, 7 e 3, ed è addirittura divisibile per 9.

Vi potreste chiedere che vantaggio c'è nel fare tutto ciò. Ma come? Non capite la bellezza della matematica, la perfezione dei calcoli, la purezza della precisione? Va bene... torniamo ai toast. Se volessimo conoscere quanti pacchetti di ciascun ingrediente comprare per non lasciare avanzi, dovremmo eseguire la scomposizione in fattori primi del quantitativo di ogni pacchetto di bontà che vogliamo gustarci e poi vedere qual è il loro multiplo comune più piccolo. Oibò! È proprio lui allora, l'm.c.m. (a questo punto possiamo chiamarlo così, dal momento che siamo amici a tutti gli effetti). Nel caso dei nostri toast: la scomposizione di 16 (il numero di fette di pan carré per confezione) è 24, quella di 15 (le sottilette) è 5•3 e quella di 8 (le fette di prosciutto contenute in una busta) è 23. Quindi l'm.c.m. si ottiene moltiplicando 5, 3 e 24. Il risultato è 240, il numero che esaurisce perfettamente le scorte. Ora, se volessimo sapere quanti pacchetti di ciascun ingrediente servirebbero, basta dividere:

240:8=30 pacchetti di prosciutto.
240:15=16 confezioni di sottilette.
240:16=15 confezioni di pan carré.

In questo modo, arrivati al centoventesimo toast (ogni toast è composto infatti da 2 fette di pan carré) avremmo potuto terminare tutti gli ingredienti contemporaneamente. Sarebbe stata decisamente una bella scorpacciata.

Il caffè esponenziale

Il caffè, si sa, per noi italiani è un must.

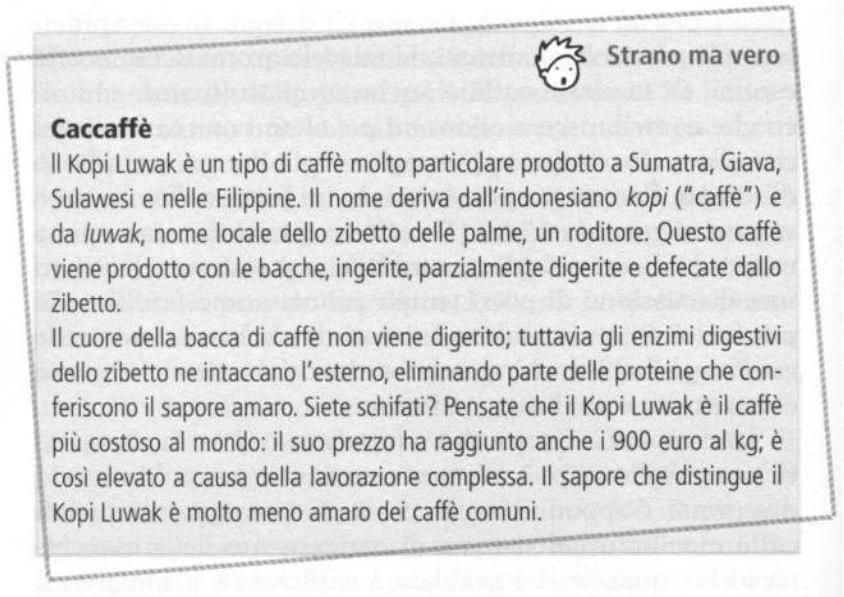
Un vanto, una bandiera. Nessuno lo sa fare come noi e, quando andiamo all'estero e ci fermiamo in un bar a berne uno, siamo sempre i primi a lamentarci che "questo non è un caffè!"

Io adoro il caffè e sono affascinato anche dall'aspetto rituale che lo avvolge: le tazzine di design, le macchinette con i particolari cromati, le miscele aromatiche, i caffè esotici. Si sa che il caffè è anche un piccolo aiuto chimico che contribuisce a oliare un po' alcuni meccanismi del cervello e ci mantiene più svegli e vigili per un certo lasso di tempo. È stato proprio bevendo un buon caffè che mi è venuta in mente un'idea. Il caffè in questione era appena uscito dal beccuccio di una moka e così mi sono ricordato una discussione di poco tempo prima: come fare il caffè più forte? Si erano subito formati due schieramenti, stile guelfi e ghibellini: chi sosteneva che deve essere ristretto e concentrato e chi lungo e diluito.

La risposta a questa domanda la può dare la matematica, o meglio ci può aiutare a curiosare un po' in modo divertente. Supponiamo che ci sia un certo quantitativo di caffè macinato nel sistema di caricamento della macchina e che, quando si è scaldata a sufficienza, azioniamo il meccanismo che fa passare l'acqua dal serbatoio fino al filtro attraverso il caffè in maniera costante, senza sbalzi nel flusso dell'acqua. Supponiamo anche che l'acqua assorba il caffè in modo uniforme, dimezzando il suo "potere caffettifero" a ogni secondo che passa. Vedremo più tardi se è un'approssimazione troppo grossolana o accettabile.

A questo punto è facile vedere come si compone il caffè: al "momento zero", quello in cui azioniamo il meccanismo di miscela, tutto il caffè si trova nel filtro e l'acqua comincerà a passare nel filtro e a mescolarsi. Via via l'acqua

assorbirà il caffè che trova sulla sua strada e cadrà nella nostra brava tazzina. Immaginiamo che all'inizio ci siano 100 "Unità di Caffè Utile" (da ora in poi le chiameremo UCU) dentro il filtro. Quando saranno finite, ciò che troviamo nel filtro è quel residuo che viene chiamato nei modi più disparati; uno di questi è "la bratta" (che, tra l'altro, sembra essere un ottimo concime per le piante).



Strano ma vero

Caccaffè

Il Kopi Luwak è un tipo di caffè molto particolare prodotto a Sumatra, Giava, Sulawesi e nelle Filippine. Il nome deriva dall'indonesiano *kopi* ("caffè") e da *luwak*, nome locale dello zibetto delle palme, un roditore. Questo caffè viene prodotto con le bacche, ingerite, parzialmente digerite e defecate dallo zibetto.

Il cuore della bacca di caffè non viene digerito; tuttavia gli enzimi digestivi dello zibetto ne intaccano l'esterno, eliminando parte delle proteine che conferiscono il sapore amaro. Siete schifati? Pensate che il Kopi Luwak è il caffè più costoso al mondo: il suo prezzo ha raggiunto anche i 900 euro al kg; è così elevato a causa della lavorazione complessa. Il sapore che distingue il Kopi Luwak è molto meno amaro dei caffè comuni.

Immaginiamo tre possibilità per il caffè: ristretto, normale e lungo. Ogni secondo che trascorre si passa da una possibilità all'altra. Quindi, interrompendo il flusso dopo un secondo, avremo un bel caffè ristretto, dopo due secondi un caffè normale e dopo tre secondi un caffè lungo (come piace tanto a un mio caro amico scozzese trapiantato in Italia). Supponendo che l'acqua assorba costantemente queste UCU, dopo il primo secondo saranno state assorbite 50 UCU, dopo due secondi la metà del residuo, e cioè 25

UCU, dopo tre secondi la metà della metà, cioè 12,5 UCU e così via. Morale della favola, più il tempo passa e più UCU (e quindi caffeina) vanno a finire nella nostra tazzina. Ecco la risposta alla domanda iniziale: il caffè più lungo è in realtà più forte, nel senso che ci sveglia di più, perché nel complesso ha più caffeina. Di sicuro però ce ne accorgiamo meno perché, se ci fossimo fermati al primo secondo, avremmo una concentrazione di 50 UCU per tazzina, nel terzo caso (ricordo che l'acqua scende con flusso costante) dovremo fare la media dei tre assorbimenti e quindi:

$$C_{3\text{sec}} = \frac{50 + 25 + 12{,}5}{3} \cong 29{,}2$$

Decisamente meno. Di conseguenza il caffè lungo sarà meno forte al gusto ma nella tazzina ce ne sarà tre volte tanto e sarà dunque più efficace nel suo potere "svegliarino". In certi casi la nostra mente fatica a discernere con chiarezza le quantità assolute da quelle relative. Con questo esempio, e con pochissimi calcoli, è facile vedere come la quantità relativa di caffè sia minore nel caso di quello lungo rispetto al ristretto, ma maggiore in assoluto.

È interessante anche cercare una formula per sapere quale sarà la concentrazione di caffè, e quindi quante UCU per tazza avremo, dopo un certo numero di secondi. Già: ecco venir fuori la piccola mania del matematico di generalizzare, trovare una formula elegante e concisa che riassuma in una riga un sistema complesso. Non me ne vogliate, e spero che abbiate pazienza a sufficienza per seguirmi ancora un po', perché questa strada spesso porta lontano.

In realtà di conti astrusi se ne devono fare ben pochi: basta guardare i numeri (e le corrispondenti frazioni) che abbiamo ottenuto per la concentrazione che esce dalla nostra indefessa macchina del caffè (be', se non sta sveglia lei...), per accorgerci di qualcosa di molto familiare:

$$50 = \frac{100}{2};\ 25 = \frac{100}{4};\ 12{,}5 = \frac{100}{8}\ldots$$

Abbiamo detto che a ogni secondo, il potere di fare il caffè, e quindi le UCU, dentro il filtro sarebbero state dimezzate. Da questa considerazione sono venuti fuori i numeri della formula sopra. Posti in frazione, ci accorgiamo che altro non sono che le potenze di 2; la cosa non ci sconvolge affatto, vero? Be', dato che a ogni passo il numero si sarebbe dovuto dimezzare, è abbastanza normale che vengano

Raggiungere l'Everest piegando un foglio di carta

Se prendessimo un foglio di carta e lo piegassimo esattamente a metà, dimezzandone quindi la superficie, di quanto aumenta il suo spessore? La risposta è semplice: ipotizzando che lo spessore del pezzo di carta sia di 1 mm, la piegatura fa aumentare di un altro millimetro lo spessore totale del foglio, che quindi diventa di 2 mm. Ma se immaginassimo di continuare a piegare il foglio più volte, sempre esattamente a metà, quante volte dovremo piegarlo per raggiungere uno spessore del foglio pari agli oltre 8000 m dell'Everest? Certo, su un pezzo di carta materialmente non riusciamo a fare più di quattro o cinque piegature, ma se immaginassimo un foglio molto grande, in grado di essere piegato molte volte, quante piegature ci vorrebbero per raggiungere la vetta più alta del pianeta? Ebbene, chi ha pensato a grandi numeri – come 3 milioni o anche solo 100.000 – ha sbagliato, e anche di parecchio.

Sono sufficienti appena 23 piegature! Sì, avete capito bene: un foglio spesso 1 mm va piegato solo 23 volte per salire sul tetto del mondo a 8389 m (per essere precisi l'Everest è un po' più elevato: 8848 m).

Infatti, ogni volta che pieghiamo a metà il foglio e ne raddoppiamo lo spessore è come se eleviamo a potenza la quantità 2, dove la grandezza della potenza è data appunto dal numero di piegature. Si ha pertanto che 2^{23} è uguale a 8388,61.

fuori le frazioni che descrivono invece un fenomeno con qualcosa che a ogni passo raddoppia. Questa è una successione esponenziale perché la nostra variabile, cioè il tempo, è all'esponente. Per ottenere la formula che determini la concentrazione di UCU per tazza a un certo secondo, dobbiamo sapere a ogni secondo qual è il contributo dato dal filtro, dal momento della pressione del tasto della macchina espresso. Lo si può ottenere ricamando questa formuletta:

$$Contributo_t = \frac{100}{2^t}$$

Per convincersi che questa formula è coerente, basta sostituire alla variabile t la cifra 3, per esempio, e verificare così che la formula restituisce il valore 12,5, che è proprio il contributo dato dal terzo secondo. Ora però vogliamo sapere quale sarà la concentrazione totale; per farlo è necessario sommare il valore dei vari contributi e dividere per il numero di contributi stessi. Dobbiamo cioè operare una media. Per esempio, per fare sempre il nostro caffè lungo, e quindi sommare tre contributi, abbiamo sommato i primi tre termini e poi diviso per 3. Una formula generale, che valga per n contributi, si può scrivere così:

$$C(t) = \sum_{t=1}^{t=t_{\max}} \frac{Contributo_t}{t} = \sum_{t=1}^{t=t_{\max}} \frac{100}{t \cdot 2^t}$$

Il modo che ho usato di esprimere la concentrazione è quello che in matematica deriva dallo studio delle serie. Una serie è una successione di contributi (spesso di infiniti contributi) o addendi che vanno a formare il totale generale, cioè la cosiddetta somma della serie.

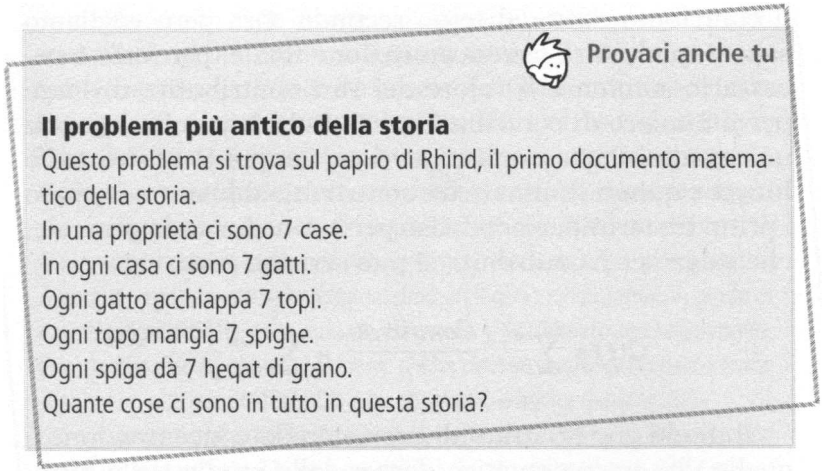
Una branca importante della matematica studia quello che succede quando facciamo tendere a infinito il numero di questi contributi. Studia se la somma della serie tenda

anch'essa a infinito oppure a un valore ben determinato; in pratica accerta se e quando le serie divergono o convergono. Ebbene, mettendo in pratica queste regole, si può arrivare a dire che, quando t_{max} tende all'infinito, la concentrazione del caffè nella tazza tende a 100.

Vale a dire che tutte le UCU si saranno trasferite dal filtro al caffè rendendo la bratta qualcosa di davvero inutile. Può sembrare ovvio, ma forse non è così.

Tanto per cominciare, non è sempre detto che una serie converga - né sappiamo a quale valore lo faccia -, ma questo piccolo modello matematico ci racconta soprattutto che, se volessimo estrarre davvero tutta la caffeina dal filtro, dovremmo attendere un tempo infinito.

Forse potrebbe venirci sonno molto prima.



Provaci anche tu

Il problema più antico della storia

Questo problema si trova sul papiro di Rhind, il primo documento matematico della storia.
In una proprietà ci sono 7 case.
In ogni casa ci sono 7 gatti.
Ogni gatto acchiappa 7 topi.
Ogni topo mangia 7 spighe.
Ogni spiga dà 7 heqat di grano.
Quante cose ci sono in tutto in questa storia?

Una bella interfaccia tosta

Alla fine di questo capitolo sulla matematica in cucina potrebbe rimanervi un... gusto amaro in bocca; potreste obiettare che, dopotutto, in cucina la matematica non

c'entra niente, se non per fare qualche conticino di semplice algebra per ricalcolare le dosi delle ricette[1].

Le cose che contano sono i sapori, gli odori, il dosaggio sapiente delle spezie, l'esperienza e gli ingredienti freschi. Vero, ma non ci posso fare niente: pur essendo un goloso, un sommelier e un appassionato di cose buone, vedo la matematica come utile alleata anche in cucina.

Dev'essere stato mentre cucinavo il mio leggendario brasato al barolo che cominciai a ragionare sulle interfacce. Il brasato è un pezzo unico di carne che viene cotto dentro una mistura di vino, verdure e spezie, per molte ore a fuoco bassissimo, e infine tagliato a fette e servito (molto caldo, mi raccomando!). Così mi chiesi che differenza ci sarebbe stata nel tagliare la carne prima di cucinarla, poi il discorso si è allargato ad altre operazioni analoghe, come quelle che prevedono lo sminuzzamento prima della cottura. Avete mai fatto caso a come lo stesso quantitativo di aglio si senta in modo molto più intenso se viene sminuzzato invece di essere messo intero nell'olio bollente del soffritto? Io sì: accadde una delle prime volte che mi cucinai la pasta aglio, olio e peperoncino.

Ragionando matematicamente provai a pensare, per semplificarmi le cose sin dall'inizio, alla testa d'aglio come a un cubetto. Partii dal presupposto che ciò che libera il sapore dentro l'olio è la quantità di superficie che entra in contatto con il liquido stesso. Due cubetti, doppia superficie, doppio sapore. Non fa una piega.

Supponiamo che il cubetto abbia lato pari a 4 cm: la superficie totale, allora, sarà la somma delle 6 facce di cui è composto, le quali hanno area pari a 16 cm2. Quindi 96 cm2. Immaginiamo di cominciare a tagliare il cubetto e, per semplicità, pensiamo di aver operato tre soli tagli che

---

[1] Un mio professore usava proprio l'espressione "con un po' di bassa cucina" per indicare un punto dove sarebbero stati necessari calcoli molto semplici, almeno per lui.

dividessero a metà i lati orientati in ogni direzione. In altre parole, ogni lato viene tagliato a metà da questi tre tagli e il risultato adesso è che abbiamo 8 cubetti di 2 cm di lato. Calcoliamo la superficie di un cubetto; poi moltiplicheremo per 8 per ottenere la superficie totale. Come prima, se il lato è di 2 cm, allora ogni faccia sarà 4 cm2 che, moltiplicati per 6, danno 24 cm2 di superficie totale per ciascun cubetto. Ora moltiplichiamo per il totale dei cubetti che possediamo e otteniamo 24-8=192 cm2. Siamo quindi passati da 96 a 192 cm2 tagliando ogni lato una sola volta; abbiamo raddoppiato la superficie e quindi anche il sapore.

Capito? Tagliando un ingrediente, o meglio ancora sminuzzandolo, aumentiamo moltissimo il suo potere di cedere sapore alla pietanza! Facciamo ancora un taglio fino ad avere cubetti di un solo cm di lato. Abbiamo diviso a metà ogni lato di ciascuno degli 8 cubetti che avevamo prima. Ora abbiamo ottenuto 8 cubetti per ciascuno di loro, quindi ora abbiamo 64 cubetti di 1 cm di lato. Questi hanno una superficie totale di 6 cm2 ciascuno. Moltiplicando 6 per 64 otteniamo ben 384 cm2 di superficie totale, il doppio rispetto a poco fa e il quadruplo rispetto all'inizio. A ogni taglio che dimezza il lato del cubetto, viene raddoppiata la superficie totale. Ovviamente per il brasato è un'altra storia: deve cuocere lentamente e il calore deve giungere al cuore della carne piano piano, per questo deve essere lasciato intero. Certo, poi in cucina e nelle cotture intervengono decine di altri fattori: la crosta, quale sale mettere, quando e come, quanto scaldare la pentola o la piastra ecc., a seconda di cosa vogliamo ottenere.

Anche qui non si può applicare pedissequamente la matematica come se una bistecca fosse un agglomerato di numeri o equazioni; tuttavia, facendo dei semplici modellini della realtà... culinaria, si riesce a capire il funzionamento di alcuni processi e quindi ad avere maggior consapevolezza delle cose.

Potrebbe infine venirvi in mente che per raffreddare una pietanza conviene tagliarla, e quindi aumentare la sua interfaccia, cioè la superficie di contatto con l'aria che, essendo più fredda, facilità il passaggio del calore. Alcuni gesti che ormai sono radicati nella cultura del quotidiano e familiari hanno una motivazione anche matematica, come abbiamo appena visto. Così, dopo ragionamenti e immancabili assaggi, ho perfezionato la tecnica per la pasta aglio, olio e peperoncino e sono arrivato al risultato di tagliare in quattro parti uno spicchio d'aglio e di toglierlo dal condimento appena dorato. Può darsi che non sia la soluzione "matematicamente più corretta", ma lo è per il mio palato!

Pazzi, pazzi teoremi

Il problema di Didone

Secondo la leggenda, Didone, regina di Tiro costretta all'esilio dal fratello Pigmalione, approdò sulle coste libiche e chiese asilo al re Iarba. Questi le concesse di fondare una città occupando tanta terra quanto poteva abbracciarne la pelle di un bue. Didone fece tagliare la pelle in strisce sottili che unì a formare una corda con la quale recintò uno spazio (oltre 4000 m^2, secondo le fonti) dove sarebbe nata Cartagine.

Dal punto di vista matematico, il problema consiste nel trovare la forma della corda che abbracci l'area più vasta possibile, ovvero quale sia l'area massima a parità di perimetro. La soluzione è intuitivamente il cerchio; la dimostrazione formale arrivò solo nel 1838, grazie al matematico svizzero Jakob Steiner.

6

I LOVE SHOPPING

ANCHE PARIS HILTON...
SI FA I CONTI IN TASCA?

I numeri più sono piccoli e più sono preziosi.

Giuseppe Spadavecchia
(Dir. tecnico, Genova Palazzo Ducale)

Spesa al supermercato: le somme più veloci del West

Essere bravi in matematica spesso, troppo spesso, viene confuso con l'essere bravi con i calcoli. Quando confondono la matematica con i conti, mi torna in mente una freddura di un mio amico ricercatore: quelli che devono essere davvero bravi con i calcoli sono i chirurghi che operano i reni. Spesso, tra amici, colui che manifesta attitudini, interesse e curiosità verso la matematica viene considerato come la calcolatrice umana del gruppo e gli tocca fare tutti i conti: dalla divisione "alla romana" del conto del ristorante, fino ai consigli sulle rate per acquisti di enormi televisori. A me lo hanno chiesto spesso.

Io, in realtà, sono molto lento a fare questo tipo di calcoli: faccio i conti usando le dita e ripeto nella mia testa le tabelline, a volte addirittura a bassa voce, destando lo stupore di tutti quelli che mi considerano una sorta di uomo-processore.

Eppure, dove c'è da fare della vera matematica, tiro fuori le mie qualità di immaginazione, spirito critico, fantasia e sicurezza; sono state queste, e non lo scimmiottare una calcolatrice, che mi hanno permesso di bere qualche sorso in più dalla fontana della matematica.

Detto ciò, ricordo con tenerezza quando andavo al supermercato con mia mamma e mi faceva tenere i conti di tutto quello che comprava. Mi divertivo come un matto, facevo le operazioni ed esercitavo la memoria, vedevo tante cose colorate e soprattutto potevo dimostrare alla mamma una mia qualità, qualcosa in cui addirittura ero forse più bravo di lei. E da bambini essere più bravi di qualcuno del gruppo dei "grandi" è davvero inebriante.

Per essere facilitato a tenere i conti, avevo sviluppato un metodo di approssimazione che in seguito scoprii essere davvero buono, anche dal punto di vista teorico. L'essenziale non è fare la somma precisa, ma una stima molto vicina al totale corretto. Questo ci può aiutare a non far lievitare il conto della spesa e ci evita di arrivare alla cassa senza avere il contante sufficiente a pagare. Ci sono alcuni possibili errori che causano una stima (di solito inferiore) del prezzo:

- Leggere soltanto i valori in euro, tralasciando di fare l'approssimazione all'euro più vicino (2,40 si approssima a 2, 19,51 si approssima a 20).
- Sbagliare le somme ostinandosi a tenere a mente anche i centesimi.
- Dimenticare di fare i riporti.
- Fare l'approssimazione prima di moltiplicare, nel caso ci siano più confezioni di uno stesso articolo.

Ecco allora una proposta facile per tenere a mente il conto della spesa. Ho scartato i metodi che si avvalgono di una calcolatrice: aggirandovi per le corsie del supermercato con la calcolatrice, oltre a sembrare un po' strampalati non

sarete mai sicuri che tutti gli importi inseriti siano corretti, dato che sul display rimane solo l'ultimo risultato. Certo, potreste usare un computer con un programma di foglio di calcolo ma forse sarebbe un po' eccessivo. Inoltre ho scartato anche il classico "carta e penna", poco pratico quando dovete anche spingere il carrello. E allora una delle soluzioni sta nell'approssimare per eccesso e per difetto, all'intero successivo o precedente. Quindi, se un articolo costa 4,99 euro, approssimiamo a 5; se costa 12,10 euro, a 12. Fino a 49 centesimi approssimiamo all'euro precedente e dai 50 centesimi in poi al successivo. Possibile che basti così poco per avere una buona stima? Possibile: gli scarti o le mancanze tendono infatti a compensarsi a vicenda, specie se la spesa comprende molti articoli. Ecco un caso realistico.

Prezzo reale	Prezzo approssimato
2,29	2
4,51	5
12,20	12
14,80	15
10,90	11
5,40	5
3,10	3
30	30
15,90	16
2,99	3
4,10	4
7,90	8
6,99	7
2,79	3
20	20
3,90	4
totale 147,77	totale 148

Ottimo, direi, e giuro che ho messo i valori a caso. Se non ci credete, provate a simulare una spesa oppure, ancora meglio, uscire e andare al supermercato.

Potremmo allora chiederci quale possa essere il massimo errore in questo metodo. Il conto è presto fatto e servito.

Supponendo di comprare N oggetti, se il prezzo di tutti questi è un numero intero e 50 centesimi, l'errore sarà N volte 50 centesimi, ovvero una sovrastima di N/2 euro. Quindi con i 16 oggetti di prima sbaglieresti di 8 euro. Ma, per contro, potrebbe accadere che tutti abbiamo un prezzo espresso da un numero intero più 49 centesimi. In questo caso sottostimereste di N•0,49, ovvero circa N/2 euro, quasi come prima. Nel caso di 16 oggetti, l'errore sarebbe di 7,84 euro.

Come abbiamo visto bene prima, questi due effetti tendono a compensarsi; di conseguenza, anche l'errore massimo si compenserà con quello minimo arrivando a un valore che non è esattamente zero (in quanto da un lato ci sono 50 centesimi e dall'altro 49) ma ci si avvicina molto e si calcola come

$$E_{teorico} = \frac{(0{,}5 \cdot N - 0{,}49 \cdot N)}{2} = \frac{N}{2}$$

Questo sarebbe il numero degli oggetti diviso per due e riportato in centesimi. È un numero molto piccolo: nel caso precedente sarebbe di soli 8 centesimi. A questo errore teorico si aggiunge quello pratico, dovuto al fatto che non necessariamente i contributi per eccesso si andranno a cancellare perfettamente con quelli per difetto, ma questo resta comunque un metodo semplice, adattabile a chi ha le mani occupate, facile da tenere a mente e applicabile anche al banco di formaggi e salumi.

Allora che faccio? Lascio?

Provaci anche tu

Una bella spesa

Cimentatevi anche voi in una spesa simulata. Sullo scaffale ci sono tredici oggetti e se ne devono acquistare sei o sette a vostra scelta. Cercate di trovare una stima affidabile in un minuto di tempo. Cronometratevi!

Livello semplice

1,10 - 7,90 - 8,90 - 14,10 - 15,90 - 2,50 - 3,10 - 1,90 - 19,90 - 17,90 - 9,10 - 12,50 - 5,50

Livello intermedio

5,50 - 3,99 - 4,40 - 11,14 - 7,73 - 8,95 - 14,10 - 15,67 - 2,50 - 10,15 - 12,99 - 6,75 - 2,13

Livello avanzato

2,89 - 13,73 - 6,65 - 3,45 - 1,99 - 19,51 - 17,99 - 9,10 - 12,86 - 5,80 - 5,25 - 11,01 - 8,46

Calcoli ben saldi

Pittore.

A volte, quando scelgo cosa indossare, mi sento un po' come un pittore. Nello specchio mi immagino come una tela e l'armadio è la mia tavolozza.

Quando la sveglia è suonata da poco e sono ancora a letto, comincio a immaginare cosa mettermi: oggi fa freddo quindi metto i pantaloni di velluto. Già, però devo andare a quella riunione importante e i pantaloni di velluto sono poco eleganti; allora meglio i jeans nuovi, che sono appena stirati, e molto eleganti, così darò l'impressione di essere preciso ma anche creativo, giacca nera e camicia bianca. Ah, ma quella nuova e bella non è ancora stirata, e allora camicia marrone e giacca beige, magari con la cravatta che ho appena comprato sui toni naturali della terra. Certo le scarpe

giuste dovrebbero essere... Le combinazioni sono davvero tante, eppure a volte ci sentiamo limitati. Magari abbiamo un completo ma ci manca proprio una cintura bianca per chiudere il cerchio; oppure, dato che usiamo spesso la camicia azzurra, ne abbiamo troppo poche per averne sempre una stirata e a portata di... manica.

Allora vorremmo ampliare il numero dei nostri capi, aggiungere qualche colore alla tavolozza e magari anche qualche pennello nuovo e dalla forma un po' diversa dal solito. In questo caso, nostri buoni amici sono i saldi; nostri nemici, però, se soffriamo di emicrania o reagiamo male negli ambienti affollati di teenager urlanti e modaioli in assetto da guerra.

Se i saldi ci permettono di fare acquisti a buon mercato, ben vengano. Ma ho notato che ogni tanto ci si confonde un po' con le percentuali e facciamo acquisti che ci sembrano più vantaggiosi di quanto non siano in realtà. Ci vengono sventolate sotto il naso offerte da sogno, sconti mirabolanti, regali e altro ancora. Diffidate soprattutto degli sconti in cui, al posto della percentuale, appaiono cifre in euro. Anche se al momento possono fare colpo, molto spesso, per non dire sempre, nascondono un inghippo. Ultimamente girava una pubblicità che prometteva 500 euro di sconto. Ora, dato che si parlava di articoli che mi interessavano, mi sono informato: la condizione era che la spesa fosse di almeno 3.500 euro. Conti alla mano, faccio subito la percentuale per rendermi conto di quanto fosse lo sconto effettivo in rapporto alla cifra che si sarebbe dovuta spendere. È presto detto: 500 euro sono un misero 15% rispetto a 3.500, sempre ammesso che si riuscisse a raggiungere la soglia minima di spesa. Se poi la si supera, è peggio: confrontato con 5.000 euro, lo sconto di 500 diventa un ancora più misero 10%.

Un altro stratagemma è incrementare le percentuali dichiarate di sconto con il passare dei giorni, fino ad arrivare a

prezzi stracciati. In questo caso, potremo contare su poca disponibilità di merce e dovremo accontentarci di quello che gli altri ci hanno lasciato (per inciso, io in questo modo ho fatto davvero ottimi affari).

Credo che il modo migliore per risparmiare sia non avere necessità di comprare. Non è banale retorica: se ci pensate, chi può acquistare senza urgenza può aspettare l'offerta vantaggiosa senza avere paura che quel colore della tavolozza, seppur poco presente sul mercato, manchi del tutto. Chi invece ha urgenza, specie di un capo di stagione, è vincolato ad andare a cercarlo quando deve, e non quando vuole, e dovrà quindi adattarsi ai prezzi che trova in quel momento.

A volte le percentuali di sconto finali arrivano a essere davvero alte. Ma conviene comprare un prodotto che ha subito degli sconti incrementali o uno che ha avuto un buono sconto all'inizio e si è fermato lì? Possiamo rispondere dopo qualche calcolo, come al solito partendo da un caso realistico di un capo, supponiamo un cappotto, in vendita in un rinomato negozio del centro a 200 euro: inizialmente è stato scontato del 10%, poi del 20%. Ma guarda guarda, un negozio sotto casa ha lo stesso identico modello della stessa marca ed era anche anche allo stesso prezzo fin quando è stato scontato del 30% senza ulteriori ribassi. Quale dei due cappotti ci conviene comprare? Be', andiamo a fare i conti.

Nel primo caso da 200 passiamo a 180 euro con lo sconto del 10% e successivamente applichiamo lo sconto sì del 20%, ma sui 180 euro del prezzo scontato. Quindi, 180:100 fa 1,8 euro, che è l'l% e poi moltiplichiamo per 20 ottenendo 36 euro. In totale lo sconto sarà di 56 euro: il prezzo finale nel negozio in centro è di 144 euro. Sotto casa hanno meno passaggio e allora hanno deciso di fare subito un'offerta appetibile, uno sconto del 30% che, calcolato su 200 euro restituisce il valore di ben 60 euro. Nel negozio sotto casa il cappotto costa 140 euro, contro i 144 del negozio in centro. Eppure le percentuali sembravano equivalersi,

dato che 20+10=30. Come può succedere? Dall'esempio si vede il perché, che dopo possiamo andare a indagare un po' meglio. Nel caso di saldi incrementali, negli sconti successivi al primo si deve calcolare lo sconto come percentuale relativa al prezzo già ribassato.

Un altro aspetto curioso che merita un'indagine è se sia più conveniente il 3x2 o il 4x3. Appena ho visto comparire per le prime volte questa formula acchiappaclienti, ho sentito puzza di bruciato. Così ho provato a fare un po' di conticini, che eseguo qui assieme a voi.

Nel 3x2 possiamo calcolare il risparmio come percentuale: se pagando due oggetti ne riceviamo tre, il nostro risparmio è di un oggetto su tre. In frazione indichiamo questo numero come 1/3, che in percentuale diventa, circa, il 33%. Nel caso del 4x3, "risparmiamo" sempre un oggetto, ma questa volta, invece di essere uno su tre, è uno su quattro: la frazione è 1/4 che si traduce nel 25% di risparmio.

Quindi il 3x2 è di sicuro più conveniente; se vorrete accertarvi della convenienza vera delle offerte che vi verranno proposte, basta impostare un calcolo simile a quello che abbiamo appena fatto.

Dunque tenete d'occhio la vostra tavolozza, e state attenti alle svendite di colori o di pennelli. Si possono fare di sicuro buoni affari, ma solo se i vestiti saranno... spogliati del giusto quantitativo di prezzo.

7 chili in 7 giorni fa un chilo al giorno?

Una volta, al ristorante un mio grasso amico matematico, dopo il terzo bis di dolce, mi guardò pacioso da sopra gli occhialetti e mi disse: "Sai com'è, devo mantenere la curva".

Normalmente si cerca di mantenere la linea, ma per mantenere la linea si può parlare un po' anche di curve.

Ormai, per legge, ogni confezione di cibo deve dichiarare i valori nutrizionali e anche le famigerate calorie, nemiche tentatrici di chiunque faccia un minimo di dieta dimagrante. A parte i casi in cui ci sono patologie, è sempre più diffusa la "dieta fai da te", seguendo i consigli che si vanno a mietere nelle riviste specializzate e non, su internet, chiacchierando con gli istruttori in palestra o semplicemente con gli amici. Bisogna fare molta attenzione e chi ha bisogno di una dieta per motivi seri è bene che se la faccia prescrivere dal dietologo. Chi invece vuole solo perdere qualche chilo forse può trovare qualche buon consiglio anche nella matematica.

Per cominciare una dieta occorre fare il conto del proprio fabbisogno calorico quotidiano, il quale dipende da molti fattori - sesso, età, peso, altezza, percentuale di massa magra ecc. - ma anche da quante calorie vengono consumate per le nostre attività lavorative giornaliere. Un nuotatore professionista consuma più calorie di un commercialista. Ottenuto il risultato con l'aiuto di tabelle varie, abbiamo un ipotetico totale di calorie spese durante il giorno. Se vogliamo dimagrire, dobbiamo assimilare un po' meno calorie in modo da intaccare le riserve di grassi. Fin qui la matematica è abbastanza semplice; è sufficiente sommare tutti i contributi dei cibi che mangiamo e accertarsi che non superino il limite che ci siamo prefissati.

Ma in realtà le cose non sono così elementari; l'aspetto interessante non è il quanto, ma il come: come queste calorie dovrebbero venire assimilate. In altre parole, nel consumo quotidiano di calorie c'è un andamento che non è costante. Nei momenti in cui facciamo sport, per esempio, consumeremo di più rispetto a quando stiamo dormendo. In termini un po' più matematici, possiamo dire che, volendo tracciare un grafico del consumo energetico in funzione delle ore della giornata, il risultato non sarà una linea piatta, bensì una curva con una forma più o meno stravagante.

Quindi, una volta capito qual è il totale di calorie che giornalmente dovremmo assumere, possiamo anche pensare a quando prenderle, provando a tracciare (anche solo nella nostra mente) un grafico del consumo in funzione delle ore della giornata in modo tale da assumere la maggioranza delle calorie qualche ora prima di quando ne avremo bisogno. È per questo motivo che i dietologi consigliano di mangiare molto al mattino e poco alla sera, per avere un apporto di energie il più possibile costante.

Abbiamo visto che una curva potrebbe rappresentare il dispendio calorico in funzione delle ore del giorno; allora potremmo pensare anche a un'altra curva che rappresenti invece l'introduzione di calorie nell'organismo, sempre in funzione delle ore della giornata. Mantenere il livello di nutrimento il più possibile costante, e quindi di energia per le nostre attività, significa matematicamente che la somma di queste due curve, o meglio delle funzioni che le rappresentano, sia una costante cioè, in termini grafici, una retta parallela all'asse delle ascisse. Nei punti in cui ci fossero degli avvallamenti, stiamo spendendo più calorie di quante ne introduciamo; nei punti in cui si presentassero delle "montagnette", stiamo introducendo più di quanto stiamo spendendo.

Per fare una vera dieta le cose non sono così lineari: sono ulteriormente complicate dal fatto che non tutti i cibi vengono assorbiti e metabolizzati allo stesso modo e che, durante il giorno, dobbiamo introdurre per forza un certo quantitativo minimo di alcune sostanze nutritive (la famosa razione giornaliera raccomandata).

Quello che vi ho... servito non è una ricetta per fare una dieta, ma piuttosto una suggestione per vedere quanto la matematica sia trasversale. Gli stessi metodi si utilizzano, per esempio, per progettare un teatro: qui abbiamo una certa curva che identifica l'assorbimento acustico dello spazio; e il bravo tecnico del suono deve usare

l'equalizzazione dei livelli per fare in modo che la somma fra quello che esce dalle casse acustiche (l'equivalente delle calorie introdotte) e quello che viene riflesso o assorbito dal teatro (l'equivalente delle calorie spese) sia il più possibile una linea piatta. Piatta come il ventre sognato da tutti coloro che fanno le diete.

Oddio, non ho niente da mettermi! Matematica prêt-à-porter

La moda è sempre stata un argomento frivolo. Spostare il focus dalla sostanza all'apparenza, dal contenuto al contenitore, dalla persona che si veste al vestito. Ma la moda di alto livello, essendo senza dubbio un'arte, è anche una scienza.

Anche noi, nel nostro piccolo, possiamo accorgerci che ci sono curiosità matematiche che tessono il quotidiano rituale del vestirsi e che potrebbero puntare un piccolo riflettore di luce nuova sui nostri gesti.

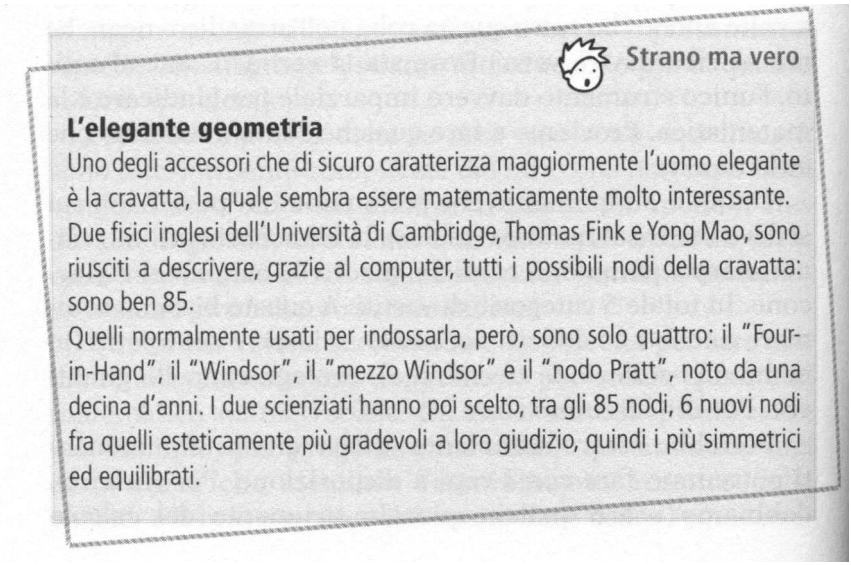
Molto spesso diciamo "non ho niente da mettermi", ma a volte anche "ho tutta questa roba nell'armadio e neanche me ne ricordavo", vero? Dove sta la verità? Come al solito, l'unico strumento davvero imparziale per giudicare è la matematica. Proviamo a fare qualche conto e vediamo che cosa ne esce.

Dunque, supponiamo che per un uomo i "pezzi" con cui si deve vestire al mattino (esclusa la biancheria intima) siano: scarpe, pantaloni, camicia, giacca (o maglione) e giaccone. In totale 5 categorie di vestiti. A questo bisogna sommare anche i cosiddetti accessori: sciarpe e sciarpette (io ne ho una collezione sterminata), orologi, cappelli, guanti ecc. Per ora lasciamo stare.

Potrebbe essere stimolante vedere quanti abbinamenti potremmo fare con i capi a disposizione. Per riuscirci, dobbiamo usare qualche piccolo strumento del calcolo

combinatorio che possiamo pensare così. Per ogni paio di scarpe, posso abbinare uno qualunque dei pantaloni che ho e per ognuno di questi abbinamenti posso abbinare anche una camicia qualsiasi e così via. Quello che viene fuori è una struttura ad albero che i matematici chiamano proprio "albero delle possibilità". Gli strumenti del calcolo combinatorio ci permettono di contare quanti sono i rami più sottili alla fine dell'albero, quindi quante possibilità abbiamo in tutto, senza contarli uno per uno ma usando formule a partire dai soli "pezzi iniziali".

Tutto ciò serve soprattutto per il calcolo delle probabilità, come abbiamo visto, ma anche in altri campi. Tornando al nostro caso, è abbastanza intuitivo che è necessario fare una semplice moltiplicazione fra i capi d'abbigliamento per ottenere il numero totale di combinazioni possibili. Infatti, se avessimo S paia di scarpe e P paia di pantaloni, per ogni paio di scarpe c'è un abbinamento di pantaloni e quindi in tutto le combinazioni saranno P•S. Proviamo a considerare un caso realistico, senza giudicare questo ipotetico guarda-



Strano ma vero

L'elegante geometria

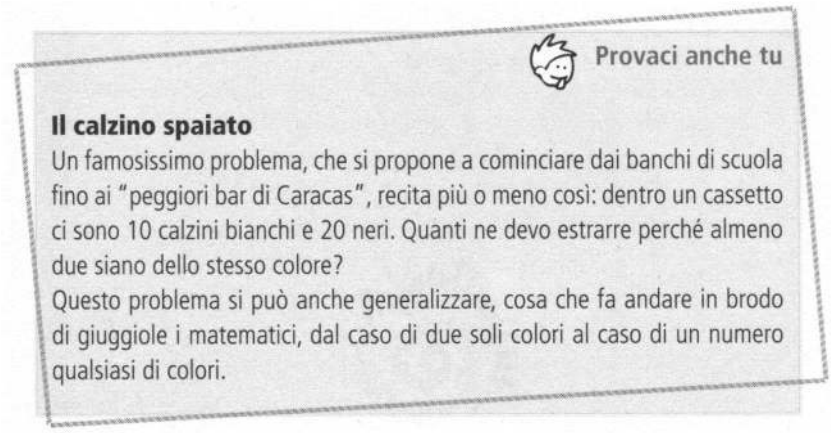
Uno degli accessori che di sicuro caratterizza maggiormente l'uomo elegante è la cravatta, la quale sembra essere matematicamente molto interessante. Due fisici inglesi dell'Università di Cambridge, Thomas Fink e Yong Mao, sono riusciti a descrivere, grazie al computer, tutti i possibili nodi della cravatta: sono ben 85.

Quelli normalmente usati per indossarla, però, sono solo quattro: il "Four-in-Hand", il "Windsor", il "mezzo Windsor" e il "nodo Pratt", noto da una decina d'anni. I due scienziati hanno poi scelto, tra gli 85 nodi, 6 nuovi nodi fra quelli esteticamente più gradevoli a loro giudizio, quindi i più simmetrici ed equilibrati.

roba rispetto al vostro, please, che magari è fornitissimo. Supponiamo che una persona sia dotata di 7 paia di scarpe, 10 paia di pantaloni, 25 camicie, 5 giacche, 5 maglioni e 2 giacconi. Facendo il conto totale, dobbiamo sommare fra loro giacche e maglioni in quanto se ne indossa uno o l'altro. Il totale è la bellezza di 35.000 combinazioni: significa che potremmo uscire di casa per quasi 96 anni senza essere mai vestiti allo stesso modo...

E allora come mai indossiamo spesso le stesse cose e a volte abbiamo la percezione di non avere niente da mettere? Ovviamente quello che abbiamo fatto è solo un conto approssimativo: volendo raffinare un po', si dovrebbe considerare che in differenti stagioni ci si veste in modo diverso, che alcuni abbinamenti cromatici dovrebbero essere punibili con 10 anni di carcere senza condizionale, che alcune combinazioni non si possono fare per come sono confezionati gli abiti e così via.

Perché questa sera non provate a impostare questo calcolo con il vostro, o la vostra, partner? Se per un po' di tempo vi aiuterà a stare lontani da boutique, shopping il sabato pomeriggio, saldi selvaggi e outlet traboccanti, la prossima volta che mi incontrerete pretendo che mi offriate da bere.


Provaci anche tu
Il calzino spaiato
Un famosissimo problema, che si propone a cominciare dai banchi di scuola fino ai "peggiori bar di Caracas", recita più o meno così: dentro un cassetto ci sono 10 calzini bianchi e 20 neri. Quanti ne devo estrarre perché almeno due siano dello stesso colore?
Questo problema si può anche generalizzare, cosa che fa andare in brodo di giuggiole i matematici, dal caso di due soli colori al caso di un numero qualsiasi di colori.

7

FUGA PER LA VITTORIA

LA PENDENZA DI FAUSTO COPPI E IL CUCCHIAIO DI FRANCESCO TOTTI

7

Oggi faccio un'analisi a 300 gradi, 60 gradi li tengo per me.

Si capisce subito quando un giocatore sa fare la diagonale del rombo.

Franco Scoglio ("il professore")

La matematica non è un pignone

Quando ero piccolo, invidiavo moltissimo mio cugino. Aveva una splendida mountain bike con cambio Shimano e andava dappertutto. Era la prima volta che vedevo una bicicletta con le marce e mi sembrava davvero una magia. Le marce. Le marce? Ma le marce erano una cosa legata alle automobili. Mio padre me le spiegava quando guidava e spesso mi faceva indovinare che marcia aveva innestato lasciandomi come unico indizio il rumore del motore comparato con la velocità alla quale stavamo andando in quel momento. Come poteva questo avere qualcosa a che vedere con la bicicletta? L'unico motore che ha la bici è costituito dalle nostre fibre muscolari, dalla buona volontà e dalla voglia di arrivare. Niente rumore.

E invece le marce c'erano anche sulla bicicletta e oggi ogni pezzo di ferro che si possa definire bicicletta avrà almeno una ventina di marce. Le marce servono, proprio

come sull'automobile, a permetterci di affrontare agevolmente le pendenze; ma perché? Senza le marce, a un giro dei nostri pedali ne corrisponde uno della ruota, come regola normale.

Quindi la fatica di far compiere un giro alla ruota la dobbiamo fare tutta quanta in un giro dei nostri pedali. Ma se potessimo diluire questa fatica e spennellarla su più giri di pedali, ecco che ci accorgeremmo meno della pendenza. Certo la nostra velocità diminuirebbe, ma affronteremmo salite prima impraticabili.

Come realizzare questa specie di magia non ce lo insegna il signor Shimano ma addirittura Archimede. Già. Sembra che Archimede, per issare una nave per vararla o tirarla in secco, avesse progettato e sperimentato un sistema di pulegge che consentiva di fare la stessa cosa che avviene nella bicicletta, cioè issare un oggetto molto pesante diluendo lo sforzo nei molti giri di argano richiesti per eseguire lo sforzo.

Le marce si chiamano anche rapporti, e non è un caso.

Partiamo allora dalla ruota dentata più piccola, detta anche pignone, e dalla grande, la corona: l'operazione di rapporto fra i diametri di corona e pignone è il rapporto, cioè la marcia.

Il fatto che grazie al cambio lo sforzo di un ciclista venga diluito ce lo dice il buon senso, ma quanto esso venga diluito ce lo spiega solo la matematica: infatti, attraverso questa formula, il rapporto ci dice quanti giri farà la ruota della bici con un nostro giro di pedali:

$$\tau = \frac{d_1}{d_2}$$

Si possono verificare tre circostanze, una per ogni condizione di pendenza:

- Riducente, nel caso il rapporto di riduzione sia maggiore di 1. La ruota gira più lentamente dei nostri pedali. È il caso della salita.
- Imparziale, nel caso il rapporto di riduzione sia uguale a 1. La ruota gira alla stessa velocità dei nostri pedali. Siamo in piano.
- Moltiplicante, nel caso il rapporto di riduzione sia compreso tra 0 e 1 (ma non arriva mai a zero). La ruota gira più lentamente dei nostri pedali. È il caso della discesa.

Per sapere quante sono le marce, è sufficiente compiere una innocua moltiplicazione.

Basta contare le corone e i pignoni e considerare che, per come è fatto il cambio a deragliatore della bicicletta, ogni corona può essere connessa a ogni pignone.

Generalmente la ruota posteriore può avere fino a 9 posizioni (corone) per la mountain bike e fino a11 posizioni per la bicicletta da corsa. Sul deragliatore anteriore si possono contare fino a 3 corone, per un totale di 27 rapporti sulla mountain bike; sulla bici da corsa si hanno 2 soli rapporti per un totale di 22.

E allora, la prossima volta che affronterete una salita stile "passo del Pordoi" pensate un po' anche ad Archimede e alle sue carrucole; chissà che non allevi la vostra fatica.

Zenone in bicicletta

Molta matematica divertente nasce dalla matematica "seria", ma alle volte è possibile che succeda il contrario, anche se non è chiaro chi decida il confine fra le due.

Molti di voi conosceranno John Nash, il geniale matematico vincitore del premio Nobel per l'economia nel 1994, che ha vissuto un'esistenza davvero toccante e singolare. Le sue vicende sono state raccontate nel film A Beautiful Mind (2001), per la regia di Ron Howard e l'interpretazione

di Russel Crowe. Sembra che a Nash piacesse tanto proporre ai suoi studenti un problema che esiste in moltissime varianti.

Supponiamo che due biciclette partano nello stesso istante da due cittadine lontane 100 km luna dall'altra; entrambi i mezzi viaggiano alla stessa velocità: 20 km/h. Nello stesso istante una mosca parte dalla camera d'aria di una delle due biciclette verso l'altra bici alla velocità di 50 km/h. Quando arriva a toccare la gomma dell'altra bicicletta, torna indietro e si dirige verso la bici da cui era partita e così via fin quando le due biciclette si incontrano (be', in realtà si scontrano) e la povera mosca rimane spiaccicata fra le due gomme. La domanda è: quanta strada ha fatto la mosca?

In genere, di fronte a un problema come questo è facile trovarsi spaesati. Succede perché ci sono quantità che variano con continuità e in contemporanea.

Per la nostra mente credo sia difficile abbracciare il fatto che la mosca viaggi mentre anche le due biciclette si muovono. È per questo che facciamo tanta fatica a "tenere sotto controllo" tutti i dati, ed è per questo che a un primo "attacco" al problema ci potremmo sentire sopraffatti e impotenti.

Se l'unica cosa che ci interessa è rispondere a questa domanda, il compito in realtà non è così arduo: è possibile trovare una specie di scorciatoia per aggirare gli ostacoli apparenti del problema e fare un calcolo banale.

Quello che è interessante è esplorare i diversi sentieri che portano alla soluzione e indagare come e dove si snodano, per vedere se possono portare anche da qualche altra parte. Ma andiamo per gradi.

Intanto troviamo una soluzione in maniera economica. Le due biciclette vanno entrambe a 20 km/h quindi è intuitivo che andranno a scontrarsi a metà strada, ma dopo quanto tempo? È questo il segreto. Andando a 20 km/h, per

percorrere 100 km ci impiegherebbero 5 ore. Ma abbiamo detto che si incontreranno a metà strada, per cui consideriamo 2,5 ore ovvero 150 minuti. Conosciamo la velocità di volo della mosca per cui è sufficiente prendere questa velocità e moltiplicarla per il tempo necessario. Quindi, andando a 50 km/h moltiplicati per 2,5 ore, la mosca percorrerà 125 km.

Questa "strada" è elegante e rappresenta una bella opportunità di accorgerci di come a volte la soluzione di un problema possa essere molto più semplice di quanto sembrava in partenza. A dire la verità, lo strumento più adatto per risolvere in maniera efficace tutti i problemi come questo è rappresentato dal calcolo infinitesimale dell'analisi matematica. In questo modo potremmo risolvere il problema anche nel caso in cui le due biciclette e la mosca non vadano a velocità costante, ma questa vari continuamente, come avviene in realtà.

Ma non voglio arrivare a tanto; mi limito a esporre un famoso paradosso, uno dei più antichi, per mostrarvi come la sua analisi si possa applicare anche a questo problema ciclistico. Anticipo già che questo paradosso viene risolto proprio dal calcolo infinitesimale. Si tratta del cosiddetto paradosso di Achille e la tartaruga, messo a punto da Zenone, celebre filosofo greco presocratico.

Secondo il paradosso, se Achille (detto "pie' veloce") accettasse la sfida di una tartaruga in una gara di corsa lasciandole un piede di vantaggio, comunque non la riprenderebbe mai, contrariamente a quello che potrebbe apparire nella realtà sensibile delle cose. Il motivo è dato dal fatto che Achille dovrebbe prima raggiungere la posizione già occupata dalla tartaruga che, nel frattempo, sarà arrivata più avanti raggiungendo una nuova posizione che la farà essere ancora in vantaggio; quando poi Achille raggiungerà nuovamente quella posizione, la tartaruga sarà ancora più avanti.

Questo discorso si può iterare per tutte le posizioni successivamente occupate dai due corridori e così la distanza tra i due, pur riducendosi verso l'infinitamente piccolo, non arriverà mai a essere pari a zero.

Il motivo che sottende queste situazioni di impasse sta nel fatto che il filosofo assume che la somma di infiniti contributi (in matematica diremmo la somma di una serie) debba essere per forza infinito a sua volta.

Noi oggi sappiamo che alcune serie non convergono, ovvero divergono, ma altre convergono a un valore finito, pur essendo composte da infiniti contributi. La dimostrazione di tutto ciò, però, si ebbe solo nel XIV secolo da parte di Richard Suiseth, che lo dimostrò per un solo caso particolare.

La dimostrazione generale della convergenza di serie infinite risale invece al Seicento, mentre Zenone espose i suoi paradossi nel V secolo a.C. e la loro portata non si realizza solo nel campo delle matematiche ma anche, anzi soprattutto, nella filosofia.

I ragionamenti sul paradosso di Zenone si adattano anche al nostro problema: possiamo infatti considerare che il povero insetto, nel suo concitato andare avanti e indietro, percorra segmenti sempre più corti che uniscono le due ruote; ma al limite questi segmenti sarebbero infiniti e quindi la mosca dovrebbe percorre un tratto di strada infinito. Ovviamente nella pratica non è così, e neppure in teoria, viste le confutazioni matematiche che ci garantiscono che la somma di una serie infinita di contributi finiti, in determinate circostanze, converge a un numero finito.

Questo problemino, che si propone spesso come un caso paradigmatico in cui esiste un modo semplice per scavalcare le difficoltà date dal calcolo infinitesimale e puntare dritti alla soluzione, si presta, in realtà, a essere usato come simpatica introduzione al calcolo infinitesimale, con buona pace di Zenone, di John Nash e... della mosca.

Provaci anche tu

Estendiamo?

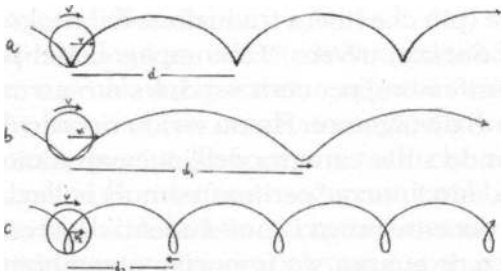
Provate a risolvere una piccola estensione del problema appena presentato. Le due biciclette partono nello stesso istante da due cittadine lontane 100 km l'una dall'altra e la prima viaggia a 20 km/h mentre la seconda a 30 km/h. Nello stesso istante una mosca parte dalla camera d'aria di una delle due biciclette verso l'altra. Quando arriva a toccare la gomma dell'altra bicicletta, torna indietro e si dirige verso la bici da cui era partita e così via fin quando le due biciclette si incontrano. La domanda è sempre la stessa: quanta strada ha percorso la mosca?

Cicloidi e cardioidi: la geometria che fa bene al cuore

Ogni tanto mi viene in mente una scena dal film L'attimo fuggente (più che libera traduzione dal titolo originario Dead Poets Society, ovvero "La compagnia dei poeti estinti"). Quel professore, per certi versi, è stato un modello nel mio lavoro di divulgatore. Ho un vivido ricordo della scena in cui, salendo sulla cattedra dell'ingessatissimo (o, come direbbe un mio amico, "pettinatissimo") collegio dove insegnava, il docente prega i suoi studenti di fare altrettanto per apprezzare quanto sia importante cambiare il punto di vista.

Il punto di vista. Il punto di vista sulla vita, sulle certezze che crediamo di avere, sul lavoro, sugli affetti, su di noi. Quanto aveva ragione! Di questa perla di saggezza, in realtà, da sempre si giovano filosofi e pensatori, scienziati e cabarettisti. Per quel che interessa noi matematici curiosi, dobbiamo citare di sicuro Isaac Newton e Albert Einstein, i quali hanno saputo guardare i fenomeni della Natura da un altro punto di vista, o grazie a un altro sistema di

riferimento. E hanno cambiato il mondo. Va ricordato anche uno stuolo di matematici che hanno realizzato tutto questo, e molto altro, in termini quantitativi. Da sempre in matematica un argomento importante è rappresentato dal cambio delle coordinate di riferimento; per esempio da cartesiane, dove si usano distanze, a polari, dove si usano angoli. Torniamo alla nostra bicicletta, ma anziché salirci sopra e pedalare, come abbiamo fatto finora, ci sediamo comodamente al bar a bere una granita al limone (se fa caldo) o una bella cioccolata calda (se fa freddo) e osserviamo senza fretta qualcuno che passa davanti a noi con la sua bici. Potremmo porci vari problemi, ma focalizziamoci su quello che gira: le due ruote. Se guardassimo la valvola della ruota e immaginassimo che lasci una traccia, cosa vedremmo? Quello che vedremmo è una curva che in matematica ha una grandissima importanza e si chiama, non a caso, cicloide.

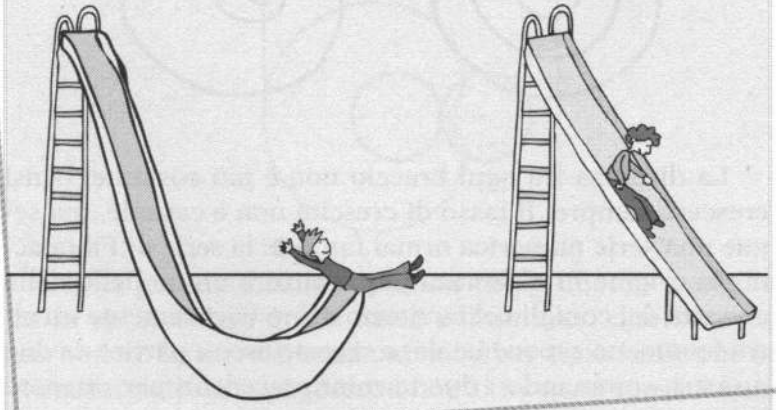


La cicloide ci serve come spunto per cambiare il nostro punto di vista; vorrei invitarvi a fare come me quando a suo tempo mi chiesi come sarebbero le cose, cambiando il sistema cui facciamo riferimento. Uno degli argomenti più potenti con cui abbia mai avuto a che fare è quello di considerare i problemi, le forme, gli oggetti che stiamo guardando anziché "diritte", rivolte su loro stesse. È la differenza che c'è tra linea e cerchio, tra qualcosa che ha un inizio e

una fine e qualcosa che non ce l'ha. La differenza tra coordinata traslazionale e rotazionale. Qui le cose possono davvero farsi interessanti; per esempio, considerando alcune funzioni matematiche disegnate sul piano, avremmo una bella sorpresa se, al posto di avere un asse delle ascisse bello diritto, questo fosse ricurvo su se stesso.

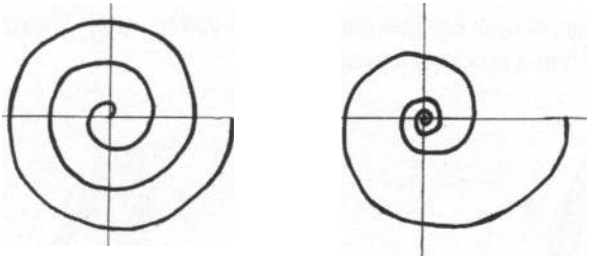
Brachiche? Brachistocrona!

La cicloide è una curva molto particolare e forse la sua più straordinaria proprietà è quella della brachistocronia. Tradotto dal greco-matematichese, significa che questa curva ha la proprietà di essere la curva di minimo tempo. Ci hanno sempre insegnato che, dati due punti, la via più breve è la linea retta, ma è vero solo in senso spaziale. In altre parole, la via più corta (in cm per intenderci) è sì la retta (sempre che operiamo su uno spazio "piatto"), ma questa non è la più breve in termini temporali. Infatti, prendendo due scivoli che comincino e finiscano alla stessa quota, e lasciando scivolare due oggetti uguali su di essi (per esempio due palline), quello che scorre sullo scivolo a forma di cicloide arriverà prima.



In questo processo di "cambio di prospettiva" dovete pensare di avvolgere letteralmente su se stesso il foglio su cui è disegnata la funzione e guardare quello che ne viene fuori. Cominciando da forme semplici, come una retta parallela all'asse delle ascisse, si otterrebbe proprio una circonferenza.

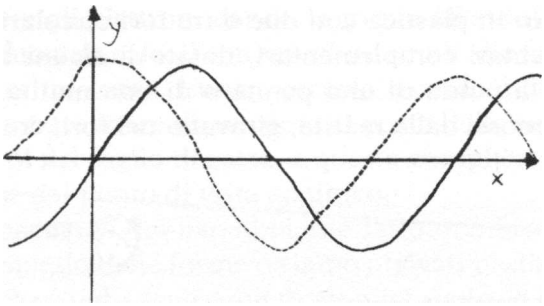
Un passetto in più: pensiamo di inclinare la retta. Avvolgendo, come bravi tappezzieri, otterremmo un'altra forma nota all'uomo ma soprattutto alla Natura: la spirale. Questa spirale, detta spirale di Archimede (nella figura sotto, a sinistra), avrà distanza costante fra ogni braccio ed è facile immaginarne il perché. Dato che la nostra retta aveva pendenza costante, senza brusche impennate o zone di pianura, a ogni giro su se stesso del foglio, la retta sarà incrociata alla stessa distanza. Diverso il caso in cui pensiamo di "avvoltolare" un'altra cliente fissa del bar delle funzioni: l'esponenziale. In questo caso si otterrebbe una spirale sì, ma di tipo logaritmico (figura di destra).



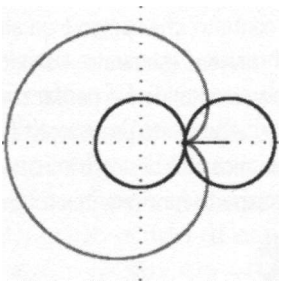
La distanza fra ogni braccio non è più costante, bensì crescerà sempre. Il tasso di crescita non è casuale, ma segue una serie numerica ormai famosa: la serie di Fibonacci. In origine fu elaborata per costruire un modello della crescita dei conigli nel territorio del re (sicuramente un altro fenomeno esponenziale) e si costruisce a partire da due numeri, sommando i due termini precedenti per ottenere il successivo. Ecco un esempio:

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89...

Immaginiamo allora di avvolgere, al posto di curve che continuano all'infinito come quelle di prima, curve che vadano "un po' su e un po' giù". Stiamo parlando di funzioni periodiche e in particolare delle più note, cioè seno e coseno. Otterremmo altre curve che sono interessanti per altri motivi e per altre applicazioni.



Si chiamano cardioidi: il loro nome deriva dalla forma a cuore e si possono scovare facilmente attorno a noi.



Basta guardare sulla superficie di un liquido contenuto in un bicchiere o una tazza e illuminato direttamente per vedere formarsi questa curva. Al bar è più facile che ve ne accorgiate, poiché spesso i faretti montati sopra il bancone illuminano la tazzina o il bicchiere in modo diretto.

Come se non bastasse, mi sono accorto che spesso anche la schiuma del cappuccino, se versata in una certa maniera, assume una forma a cuore. Potrebbe darsi che il processo che governa l'azione di versare il latte, con il gesto abile di un barista che non vuole fare la goccia, provenga dalla meccanica dei fluidi, e che le forze in gioco creino quella strana forma.

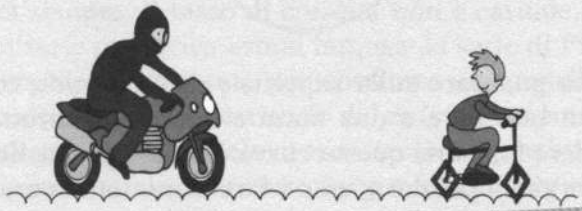
Per divertirmi con questo genere di forme, da bambino avevo un gioco molto carino: era composto da una sorta di righello in plastica con due o tre fori circolari e alcuni dischi dentati complementari, dotati di alcuni buchi per infilarci la punta di una penna o di una matita. I dischi dentati, mossi dalla matita, giravano nei fori, creando forme fantastiche

Strano ma vero

Le ruote quadrate

I profili degli ingranaggi fanno uso di curve e di calcoli (come quelli che abbiamo visto in questo capitolo) per scorrere senza problema uno sull'altro senza incastrarsi. La progettazione di queste parti meccaniche, in qualche modo, aiuta a calcolare il "negativo" dei denti di un ingranaggio per poter disegnare l'elemento a contatto, che spesso è un altro ingranaggio.

Esiste qualcuno che ha davvero esagerato. Usando questa tecnica è stato possibile disegnare un pavimento idoneo per far correre una bicicletta con... ruote quadrate. È questo l'argomento protagonista di diverse mostre e laboratori interattivi di matematica ed è di sicuro impatto; è anche davvero strano cavalcare un mezzo di trasporto funzionante così buffo.



che sembravano fiori, spirali, motivi decorativi e altre forme naturali. A seconda di quale dischetto si inseriva e in quale foro, si disegnavano figure con più o meno "petali".

Solo molti anni dopo ho scoperto che quel gioco riportava su una coordinata circolare forme di onde con una frequenza più o meno elevata, che è esattamente quello che hanno fatto i padri della teoria atomica quantistica. I famosi orbitali atomici, regioni dello spazio in cui si vanno a sistemare gli elettroni dando la forma all'atomo stesso, vengono fuori da calcoli con soluzioni simili alle forme che vi ho descritto sopra. L'unica piccola, grande differenza è che vanno fatte in tre dimensioni al posto delle nostre due dimensioni del foglio di carta, e questo complica moltissimo le cose dal punto di vista analitico.

Così, partendo dal bar, abbiamo fatto una breve cavalcata nel mondo delle forme e siamo arrivati perfino al microscopico mondo degli orbitali atomici.

A rigor di logica (er teorema der cucchiaio)

Gran numero.

Quante volte abbiamo sentito questa espressione dai radio-telecronisti di calcio? In questo caso la matematica c'entra ben poco e l'espressione indica qualcosa di incredibile, inaspettato, un colpo di classe che solo un grande campione dai "piedi d'oro" può eseguire. Di solito vengono messi a segno dai talenti in grado di cambiare il destino di una partita, di inventare la giocata che illumini la strada ai compagni, di tenere alto il morale della squadra e farla combattere fino al momento buono in cui affondare un colpo micidiale alla difesa avversaria. Solitamente questo campione porta la maglia numero 10 ed è chiamato in causa, data la sua bravura nel palleggio, a tirare i rigori.

Durante una partita è difficile che se ne debbano tirare più di due o tre, ma ci sono casi in cui il destino stesso di un match si decide ai calci di rigore; in quel caso l'asso della squadra ne può tirare solo uno. Di solito è l'ultimo della prima tornata perché è il rigore più scomodo, con tutto il peso dei precedenti esiti sulle spalle e la responsabilità verso compagni, dirigenti e tifosi.

Tra coloro che hanno vestito i panni del fantasista, del regista o chiamatelo come volete, ci sono alcuni tra i più grandi calciatori della storia, primo fra tutti Diego Armando Maradona. Anche in Italia non sono mancati grandissimi "numeri 10"; quello che ci interessa qui è Francesco Totti. Oltre che per le sue innegabili capacità atletiche e calcistiche, è diventato famoso (anche fra i non appassionati di calcio) grazie al "rigore a cucchiaio". Questo particolare modo di tirare il rigore prende il nome proprio dal movimento "a scucchiaiare" il pallone, che consiste nel colpirlo e dirigerlo verso un angolo della porta che non ha nulla a che vedere con la direzione apparente del corpo e del piede del giocatore. La peculiarità di questo colpo da maestro è anche quella di spiazzare il portiere, in tutti i sensi, dopo una serie di rigori già tirati dai compagni. I portieri, come chiunque dotato di buon senso, per decidere da quale lato buttarsi, si basano anche su come e dove sono stati tirati i rigori precedenti. La prontezza è tutto, quando c'è di mezzo un rigore: se si prende il tempo di guardare, pensare e decidere, è troppo tardi e la palla è già nel sacco. Quindi, dopo tre penalty tirati a destra, è ragionevole pensare che il prossimo sia a sinistra. Però anche chi è sul dischetto lo sa e potrebbe fare lo stesso identico ragionamento del portiere, tirando di nuovo a sinistra. Però il portiere potrebbe immaginare tutto ciò e buttarsi a sinistra comunque. E così via.

Questo ragionamento a "scatole cinesi" si può continuare quanto si vuole, anche all'infinito.

Così ho pensato a un famoso problema analizzato da un economista che si può adattare a questa situazione: riguarda una branca della matematica che si chiama teoria dei giochi. Studia e modellizza l'interazione fra soggetti che si comportano in maniera razionale e si propone di descrivere e prevedere alcune porzioni di realtà difficilmente descrivibili con la matematica fino a poco tempo fa: i sistemi sociali, economici e gli aspetti psicologici delle scelte degli individui. La nascita della teoria dei giochi risale a non molto tempo fa, precisamente nel 1944, con l'uscita del libro Theory of Games and Economie Behavior, di John von Neumann e Oskar Morgenstern. Per divenire famosa tra pubblico e critica si dovettero però aspettare John Nash e le sue straordinarie scoperte, raccontate tra l'altro nel già citato A Beautiful Mind.

E proprio di bellezza parliamo, ma non di quella della mente bensì del corpo. Occupiamoci di questo esperimento ideale che si chiama "concorso di bellezza", ma che non riguarda affatto la bellezza dei calciatori o delle veline. Questa teoria è stata elaborata da John Maynard Keynes il quale era convinto che la speculazione in Borsa fosse l'arte di capire che cosa gli altri operatori di mercato avrebbero pensato riguardo al futuro. Per spiegarlo si usa una metafora: quella, appunto, del concorso di bellezza. Se volessimo indovinare quale ragazza vincerà un concorso, il nostro parere conterebbe poco, perciò è inutile cercare di capire quale sia la donna più avvenente per noi. Per indovinare la vincente dobbiamo invece cercare di capire come voterà la maggioranza dei giurati. La stessa cosa, secondo Keynes, vale per il mercato azionario: bisogna indovinare come agirà la maggioranza degli operatori. Per cogliere meglio questo interessante pezzetto di teoria, si può pensare di fare il seguente esperimento.

Prendiamo un gruppo abbastanza nutrito di persone, supponiamo almeno 30 individui, e annunciamo che

metteremo in palio una cospicua somma di denaro. Ciascuno deve scrivere su un foglio che poi consegnerà piegato assieme a tutti gli altri il proprio nome e cognome e un numero fra 1 e 100 (compresi). Il vincitore sarà colui che si avvicinerà di più alla metà della media conteggiata su tutti i biglietti pervenuti.

Supponendo che uno voglia scrivere il numero a metà fra 1 e 100, dato che si parla proprio di media, prima di scrivere 50 potrebbe sospettare che forse tutti hanno fatto la stessa supposizione: in questo modo, la media di tutti i voti, se tutti hanno scritto 50, sarà proprio 50. Allora, per avvicinarsi il più possibile alla metà della media e vincere, potrebbe scrivere 25.

Se solo lui ci ha pensato, la cosa funziona. Ma se ci hanno pensato tutti non funziona più, perché ricadiamo nel caso di prima e così potremmo voler scrivere la metà di 25 che è, approssimando, 12. E così via. Anche qui ha inizio un ragionamento in stile scatole cinesi che potrebbe non avere mai termine. Infatti la teoria dei giochi, che studia casi come questo, dice che la soluzione più razionale è scrivere 1; però, se tutti ragionassero in questi termini, non ci sarebbe nessun vincitore: tutti scriverebbero 1.

La cosa interessante, se si prova a fare questo esperimento, è che non succede mai che tutti ragionino razionalmente. Non solo, andando a fare il conto della media dei numeri ricevuti, si ottiene un valore che ci indica con buona approssimazione a quale "scatola cinese" i partecipanti si sono mediamente fermati, cioè quanti passaggi logici hanno compiuto. In questo esempio perciò, si vede bene quanto dice Keynes a proposito di pensare quello che penseranno gli altri. In un esperimento come questo, se siamo bravi, se intuiamo quanti passaggi logici chi sta intorno a noi potrebbe compiere, potremmo fare il conto di quale media si otterrebbe e quindi provare ad avvicinarci il più possibile alla sua metà. Ma non dimentichiamo che in questi casi è

impossibile astrarsi e controllare completamente il processo: anche noi ne facciamo parte, proprio come in Borsa.

La matematica e l'economia quindi ci dicono che il modo più razionale per decidere è iterare al massimo il ragionamento. Certo, quando è possibile. Ci sono casi, infatti, in cui non ci potremmo fermare mai, proprio come quando c'è un pallone sul dischetto e il portiere deve decidere se buttarsi a destra o a sinistra. Qui le scatole cinesi potrebbero andare avanti all'infinito: penso che tiri a destra-lui pensa che io penso che tiri a destra, allora tiro a sinistra-lui pensa che io penso che...

Nessuna soluzione? Quasi. Chi ha trovato una soluzione a questa impasse, chi è uscito dagli schemi, chi ha frantumato le prigioni della logica è... Francesco Totti! Con il rigore a cucchiaio si spiazza il portiere, il quale può fare tutti i ragionamenti che vuole e poi si vedrà beffato con un pallonetto che si insacca alle sue spalle. Nei casi come questo, confondere, spiazzare, ragionare su una strada diversa spesso è una strategia vincente e conduce al miglior risultato.

Proposta: laurea *honoris causa* a Francesco Totti!

Abbiamo vinto i mondiali! Ma era matematico?

Nel 2006, subito dopo la vittoria dell'Italia ai mondiali di calcio, organizzai una tavola rotonda presso la Palestra della Matematica di Genova. Moderavo la discussione fra un allenatore di calcio e un matematico che di solito nel suo lavoro si occupa di questioni molto complesse, legate soprattutto alla teoria dei numeri. Abbiamo trovato interessanti spunti di riflessione e la conversazione è stata molto frizzante, visto tra l'altro che uno è tifoso della Sampdoria e l'altro è un genoano sfegatato, le due squadre della mia

città. Riporto una parte della conversazione di questo... derby matematico, avvenuto a Genova, il 25 luglio 2006.

MAT: *Ettore Cadetti, ricercatore e docente presso il DIMA, Università degli Studi di Genova.*
ALL: *Domenico Rizzuto, allenatore patentato UEFA.*
MOD: *Giovanni Filocamo, fisico divulgatore scientifico.*

MOD: "Che cos'è per voi il calcio?"
MAT : "Un gioco molto bello e molto popolare, dove è difficile fare previsioni."
ALL: "Un bellissimo gioco di squadra che insegna a molti giovani alcuni principi cardine della vita sociale: la solidarietà e la propensione a collaborare per raggiungere un obiettivo comune."
MOD: "Esiste, secondo voi, un rapporto fra il calcio e la matematica?"
MAT: "La matematica è sicuramente uno strumento per l'analisi del gioco, più che per la previsione dei risultati. Meglio ancora, la geometria."
MOD: "Perché proprio la geometria?"
MAT: " Se è vero che sono fondamentali il possesso della palla e il pressing sull'avversario, quando la palla ce l'ha lui, è importante coprire il campo il più possibile con le zone. Stiamo parlando di superfici, del loro intreccio e di ottimizzazione: elementi fondamentali nello studio di molti problemi matematici."
ALL: "Vero, ma non bisogna dimenticare che compito dell'allenatore è trovare compromessi, alcuni dei quali molto pesanti: deve fare i conti con la condizione atletica dei suoi giocatori e con la loro capacità massima di sopportazione della corsa. Molte squadre danno tutto nella prima mezz'ora di gioco e magari vanno in vantaggio; ma una partita dura 90 minuti e, quando i muscoli presentano il conto della fatica, può mancare la capacità di difendersi

efficacemente. Questo è un grave errore che può costare caro nel secondo tempo."

A questo punto il discorso si allarga e coinvolge i concetti di "spazio" del gioco e di "tempo", nel senso di economia delle energie.
MAT vi riconosce un' analogia con le cosiddette "trasformazioni ergodiche". Per trasformazione si intende il processo che fa passare un sistema da uno stato all'altro. Questa definizione molto generale si può applicare al calcio (passaggio dalla difesa all'attacco), alla termodinamica (passaggio di un gas da un temperatura all'altra) e alla meccanica (passaggio di un pendolo da fermo a oscillante). Se una trasformazione è ergodica, ha proprietà particolari, e le medie temporali delle variabili in gioco coincidono con le medie statistiche (una specie di "nulla si crea e nulla si distrugge").

ALL: "Quando un allenatore studia una partita da affrontare, niente è lasciato al caso. Si analizzano i filmati delle partite dell'avversario e si cercano le contromosse."
MOD: "Le contromosse si studiano anche in molti giochi, per esempio gli scacchi. Non tutti sanno che la teoria dei giochi è un ramo della matematica che studia da un punto di vista formale le interazioni fra sistemi e le strategie di successo. Possiamo allora dire che un allenatore è un po' un matematico?"
MAT: "Sì, anche se la matematica che fa l'allenatore non è quella convenzionale. Uno dei casi più importanti di calcio 'scientifico', cioè con un allenatore che veramente ragionava come un matematico, lo troviamo nell'Olanda degli anni Settanta di Rinus Michels, il quale ha inaugurato il cosiddetto 'calcio totale'."
MOD: "Di cosa si tratta?"
MAT: "Fino ad allora gli schemi calcistici erano legati al tradizionale concetto delle marcature fisse, con un libero che si staccava dalla difesa. Michels decise che i giocatori

della sua squadra dovessero diventare quanto più universali possibile e capaci di ricoprire più ruoli. Ha elaborato, così, uno schema di gioco a zona con quattro giocatori in difesa in linea pronti alla tattica del fuorigioco (assolutamente sconosciuta ai tempi) e centrocampisti e attaccanti in grado di fare un asfissiante pressing a tutto campo sui portatori di palla avversari. Ho eseguito qualche ricerca per vedere se questo eccezionale allenatore avesse conoscenze in qualche campo della matematica o se l'avesse mai studiata formalmente, ma sembra di no."

MOD: "Torniamo a parlare della geometria degli allenatori, per così dire. La cosa interessante è che sembra possibile che un allenatore, anche se non ha mai studiato in profondità la matematica si crea, per così dire, la sua matematica personale. È possibile trovare questo aspetto anche nei giocatori?"

ALL: "Certamente sì. C'è però da dire che nel calcio moderno ai giocatori viene chiesto di correre di più e di velocizzare il gioco, mentre il vero cervello è seduto in panchina e dispensa consigli da bordo campo, a volte urlando molto!"

MOD: "Professore, condivide questo pensiero?"

MAT: "Sì, però vorrei rimarcare che quando si giocava con il modulo classico - due difensori centrali, due esterni, un centrocampista in mezzo al campo, le ali che corrono sui lati e gli attaccanti che cercano di andare in porta - c'era anche il ruolo del cosiddetto regista. A questo giocatore era demandato il compito di inventare, improvvisare, fare la giocata che illuminasse la partita. Solitamente in questo ruolo giocava il fuoriclasse della squadra, quello che portava la maglia numero 10."

MOD: "Quindi si può dire che questo giocatore usa solo l'istinto per giocare, oppure deve anche avere schemi ferrei su cui basarsi e capacità di ragionamento?"

MAT: "Questo tipo di giocatore deve possedere certamente l'istinto (anche se questo è più importante nel ruolo di centravanti), ma la cosa più importante è che deve saper ragionare, deve sapere approcciare un problema per risolverlo in maniera veloce ed elegante. Esempi di giocatori italiani moderni che possiedono queste qualità sono Totti o Pirlo."

MOD: "Be', potremmo quasi dire che sono matematici mancati?"

MAT: "Quello che conta davvero per fare della matematica è la forma mentis: il formalismo e le teorie si possono sempre imparare, ma le cose più importanti sono l'attitudine e l'abilità nel risolvere un problema."

MOD: "Infatti. Matematica vuol dire, per la maggior parte dei casi, cercare di risolvere un problema. Che questo problema sia dimostrare un teorema, o scegliere una tattica per vincere una partita di calcio è, secondo me, un aspetto secondario."

Da questa interessante chiacchierata di sicuro è emerso che la certezza matematica non possa esistere in un gioco complesso come il calcio; forse, l'unico teorema dimostrabile afferma che "la palla è rotonda", ovvero che nei novanta minuti di una partita può succedere qualsiasi cosa.

8

È QUI LA FESTA?

QUANDO ANCHE BRIATORE PUÒ FARE IL MATEMATICO

8

I capelli vanno prima pettinati per poi spettinarli.
Mustafa, il mio parrucchiere

L'algoritmo dei tacchi a spillo

E poi dicono che matematici e fisici hanno la testa tra le nuvole e non fanno mai qualcosa di concreto o divertente... Nel 2004 i ricercatori che lavoravano con Paul Stevenson sulle rive del Tamigi hanno dimostrato il contrario. Già, e hanno trovato la formula del... tacco perfetto. Non un'innovazione tecnologia o di design, non un'invasione di campo della scienza pura nel marketing, ma una formula che calcola seriamente e su basi empiriche (forse sto esagerando) l'altezza dei tacchi da indossare per uscire la sera.

Certo, potreste obiettare che le scarpe vengono scelte in base all'abbinamento con il vestito, alla comodità e, non ultimo, in base al mood del momento. Ma perché essere banali e mettersi davanti alla scarpiera stracolma con aria pensierosa, mentre ci si sta lisciando i capelli? C'è una formula precotta, pronta per essere messa nel microonde e restituirci il valore (in centimetri) dell'altezza ideale del tacco sul quale trampolare fuori di casa.

La formula è stata elaborata dai sopracitati fisici dell'Institute of Physics di Londra, sulla base di alcune considerazioni che prendono in esame molti fattori, primo fra tutti quello sociologico, che viene chiamato Q.

$$Q = \frac{p \cdot (y + 9) \cdot L}{(t + 1) \cdot (A + 1) \cdot (y + 10) \cdot (L + 20)}$$

Vediamo che cosa significano le singole voci in modo da farvi compilare questa formula e calcolare il vostro fattore sociologico.

- La lettera "p" indica la probabilità che il tacco vi doni. Va da 0 a 1. Zero corrisponde a "Ma perché non mettere le pantofole?" e uno a "Con questi tacchi mi sento una tigre!"
- La lettera "y" è l'indicatore del numero di anni di esperienza sui tacchi. Ovviamente, più ne avrete e più potrete osare.
- "L" è il costo delle scarpe espresso in sterline; quindi bisogna operare una conversione e al cambio attuale (2010) moltiplicare l'euro per 0,9.
- La lettera "t" misura quante le scarpe siano "fashion". Bisogna inserire i mesi passati dall'uscita sul mercato delle scarpe. Se la vostra cifra è zero, si tratta di un nuovo modello.
- Infine "A" è... il valore del tasso alcolico, misurato in bicchieri che si programma di bere. Va da sé che tacchi alti presuppongono un buon mantenimento del proprio asse di equilibrio.

Il fattore sociologico Q va da un minimo di zero fino a un massimo di uno. Se il risultato è zero, vuol dire che forse avete più voglia di infilarvi sotto la più spessa delle vostre coperte con in una mano un secchiello di gelato

e nell'altra il telecomando del lettore dvd con un film nostalgico. Uno, invece, significa che è meglio che andiate ad aprire la porta di casa: è probabile che fuori troviate una fila di amici e spasimanti. È interessante notare come i fattori che possono portare a zero Q siano "L" e "p", cioè la probabilità che il tacco vi doni e il costo delle vostre scarpe. Se pensate che il tacco non vi stia affatto bene, così come se le vostre scarpe non sono costate niente, la formula non vi considera "animali sociali". Un colpo all'autostima e uno al portafogli. Per gli anni di esperienza invece c'è un "abbuono" di 9 anni; quindi, anche se siete alla vostra prima esperienza "rialzata", la formula indica che dovete aggiungere 9 e salverete così il vostro fattore Q.

Fatto ciò, e quindi verificata la vostra predisposizione ad attrarre gli sguardi, bere, scatenarvi, e la vostra esperienza ad ancheggiare abilmente fra i tavolini, potrete calcolare l'atteso valore in centimetri in questo modo:

$$h = Q \cdot \left(12 + 3\frac{s}{8}\right)$$

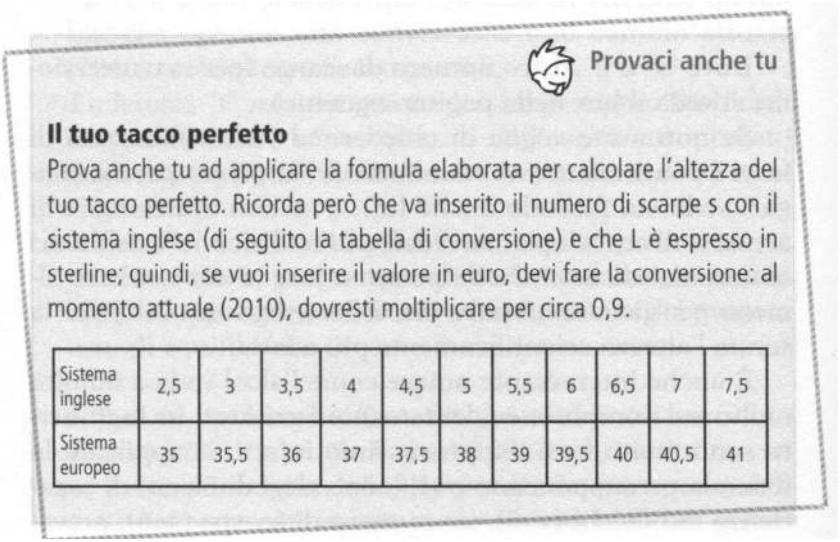
Dove "s" è il vostro numero di scarpe (per la conversione, si veda il box nella pagina seguente).

Se non avete voglia di chiedere al vostro fidanzato di farvi i conti mentre vi state facendo la piega (perché magari se la sta facendo anche lui), o se non avete voglia di armarvi di carta e penna, trovate in rete alcuni "calcolatori automatici di tacchi" che possono fare al caso vostro, almeno per giocare un po' e per vedere se avete scelto per la serata l'altezza scientificamente più adatta.

È anche interessante notare come l'alcol vada a influire molto sul computo: evidentemente i cocktail in Inghilterra sono molto forti. Se provassimo infatti ad applicare la formula presupponendo p=l, con valori di 5 anni di esperienza sui tacchi (y=5), un numero di scarpe (s=6),

prevedendo una serata a basso tasso alcolico (A=0), è possibile spingersi a indossare scarpe modernissime (t=0), costosissime (L=300 sterline) e altissime (tacco da 12,54 cm, ammesso che ne troviate in commercio). Il fattore sociologico Q risulta in questo caso pari a 0,88. Se si volesse alzare un po' il gomito (A=6), sarà necessario abbassare il tacco a soli 2,01 cm (con Q=0,15). Morale della favola, se i cocktail sono inaspettatamente buoni o se vi offrono una bottiglia di Brunello di Montalcino dell'85 cui non potete dire di no, portate un seghetto in borsetta per... regolare i conti. A ogni modo, come in tutte le regole, anche in questo caso ci sono le immancabili eccezioni.

Credo che a qualcuno di voi sia venuta in mente la biondona di Sex and the City, Carrie Bradshaw, la quale ha fatto del tacco a spillo una vera filosofia di vita. Certo è che i suoi "chilometri su strada" sui tacchi sono tantissimi, e credo che rischi di mandare in frantumi la formula sottoponendola alla prova estrema di una sgroppata su tacco 12 in un ingombrante abito nuziale e per le strade di Manhattan.



Provaci anche tu

Il tuo tacco perfetto

Prova anche tu ad applicare la formula elaborata per calcolare l'altezza del tuo tacco perfetto. Ricorda però che va inserito il numero di scarpe s con il sistema inglese (di seguito la tabella di conversione) e che L è espresso in sterline; quindi, se vuoi inserire il valore in euro, devi fare la conversione: al momento attuale (2010), dovresti moltiplicare per circa 0,9.

Sistema inglese	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
Sistema europeo	35	35,5	36	37	37,5	38	39	39,5	40	40,5	41

Telefonini intelligenti

"Agam."

Quante volte vi è successo di voler scrivere la parola "Ciao" per cominciare un sms e il T9 non era inserito? A me tantissime.

A suo modo, il T9 è stata un'invenzione geniale. Quando il mio amico Maurizio mi fece vedere questa innovazione sul suo nuovo cellulare, pensai che fosse la solita strategia dei produttori di gadget elettronici per acchiappare clienti indolenti. Invece, poco tempo dopo era anche sul mio telefonino. Il T9, credo lo conosciate tutti, è un sistema che consente di scrivere parole di senso compiuto con l'ausilio del tastierino numerico: il testo che stiamo digitando viene "indovinato" e completato dal sistema. A ogni numero, infatti, corrispondono tre o quattro lettere, il che ci costringerebbe a premere il tasto più volte per raggiungere la lettera desiderata. Il T9 ci evita questa fatica e consente di premere il tasto una volta sola. Ci saranno molte parole che corrispondono alla sequenza, ma solo poche hanno senso compiuto e sono proprio quelle che il telefono inserisce nel testo. Se ci sono più parole con la stessa combinazione, possiamo premere un tasto convenzionato che passa in rassegna queste voci fino a quella che vogliamo. Questo sistema, che a prima vista può sembrare artificioso, in realtà velocizza parecchio la composizione di un sms.

Ma perché funziona così bene?, mi chiesi. Be', non è difficile capirlo con un po' di sana matematica. Sul tastierino le lettere sono disposte su otto tasti: sei hanno tre lettere e due ne hanno quattro. Considerando parole di due lettere, e quindi premendo due tasti (o due volte lo stesso tasto), abbiamo 3 possibilità per la prima lettera e 3 per la seconda: 9 possibilità in tutto. Se le lettere diventano tre, dovremo moltiplicare di nuovo per 3 e otteniamo 27. Con quattro lettere, 81 combinazioni e così via. Abbiamo trovato le

potenze di 3. Ora, 81 parole non sono pochissime: ce ne potrebbero essere anche molte di senso compiuto; ma il T9 ha diversi assi da giocare. Intanto, dobbiamo considerare che l'ordine in cui premiamo i tasti conta molto: infatti, mentre potrebbero essere tante le parole di senso compiuto costruite con un certo numero di lettere, diventano molte meno quando stabiliamo l'ordine in cui le disponiamo.

Facciamo un esempio tra i più classici. Consideriamo le lettere A, O, R, M. Le possibili combinazioni (ovvero i possibili anagrammi) si calcolano sempre con concetti presi a prestito dal calcolo combinatorio, tenendo a mente che non possiamo ripetere le lettere; quindi, una volta usata una lettera, non possiamo usarla più. Possiamo scegliere la prima lettera in quattro modi diversi; per la seconda rimangono tre possibilità, due per la terza e una sola per la quarta, l'ultima lettera rimasta. Le combinazioni sono quindi $4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1 = 4! = 24$. Anche qui non sono poche, ma quelle di senso compiuto sono già un sottoinsieme di queste. Proviamo a vedere quali sono: amor, mora, roma, armo, orma, ramo. Sei in tutto, e in questo caso sono molte, credetemi! Quindi, solo 6 su 24: ci siamo limitati a un quarto delle possibilità. Ma ora supponiamo di voler digitare la parola "amor" con il tastierino e il T9 inserito. Dovremmo comporre la sequenza 2-6-6-7: solo due lettere si trovano sullo stesso numero, la "m" e la "o". Questo limita ulteriormente le possibilità in quanto ora, almeno fra le lettere che abbiamo considerato per questo esempio, potremmo comporre le parole "amor" e "aomr". Il telefono non avrebbe dubbi a presentare l'unica parola di senso compiuto che è la prima. In realtà, la combinazione 2-6-6-7 dà anche l'opzione "coop".

Inoltre, e questo vale per l'italiano e le lingue indoeuropee soprattutto, le parole sono formate da un'alternanza di vocali e consonanti; e le vocali sono tutte su tasti diversi, il che riduce ulteriormente le possibilità. Ricapitolando, la

combinatoria, il fatto che l'ordine conta, che le parole di senso compiuto sono molte meno di quelle possibili e la composizione con le vocali costituiscono tutti dei filtri per far funzionare l'algoritmo che muove il T9.

A volte però si sbaglia e ci si fraintende con il cellulare, in modi curiosi. Si dice spesso che si ha paura di chiedere scusa, ed è per questo che ci costa tanta fatica farlo. Paura di esporsi, di ammettere che si è sbagliato, ecc. Be', il T9 lo sa: con la stessa combinazione del tastierino (più precisamente premendo la sequenza 7-2-8-7-2) si richiamano sia la parola "scusa" sia "paura". Nel mio telefono la prima ad apparire è "paura": ho imparato che ogni volta che ho chiesto scusa non dovevo averne paura.

Sul mio attuale cellulare non c'è più il T9. Il mio iPhone è infatti dotato di una tastiera completa, come quella del computer, e non c'è bisogno di interpretare le parole, anche se hanno escogitato un sistema che si basa su un tipo diverso di comprensione da parte della macchina. In un telefonino i tasti sono tutti molto vicini ed è facile che si prema un tasto al posto di un altro. Così, il mio telefono sempre più intelligente ha un sistema che intuisce l'errore e mi suggerisce la parola giusta secondo lui. L'algoritmo che gestisce questo sistema dev'essere sicuramente interessante da esplorare.

Provaci anche tu

Giochi di parole

Potreste divertivi a trovare le parole più "fraintese" dal vostro cellulare. Potreste anche fare una cosa più matematica: controllare quante parole di senso compiuto vengono fuori con tutte le combinazioni, per esempio, di tre tasti. Non sarà il massimo, ma quando vi sarete annoiati di giocare al rally che hanno caricato sul vostro telefonino, potrebbe essere una valida alternativa mentre aspettate l'autobus.

Happy hour paradosso

Ho sempre pensato che una festa rappresenti un fantastico laboratorio sociologico. Se si pone un po' di attenzione ai partecipanti, è davvero piacevole individuare alcuni comportamenti peculiari, dinamiche di gruppo, ansie e paure. Di solito le feste vengono organizzate per socializzare, conoscere persone nuove con cui chiacchierare, scambiarsi pensieri ed esperienze; con alcune di loro si può stringere amicizia, oppure può nascere un amore. In realtà è paradossale come in situazioni di contatto con sconosciuti si tenda sempre a chiudersi nel proprio guscio, a parlare solo con chi già si conosce oppure addirittura a, come si suole dire, "fare tappezzeria"[1].

Quando si conosce una persona nuova, di solito una buona strategia è trovare il "minimo comune multiplo" con lei: le cose che si hanno in comune. Può essere un modo per intavolare una conversazione, certo, ma gli psicologi dicono che questo predisponga bene l'altro ad aprirsi e a essere disponibile a socializzare.

Se avete dato una festa e vedete che non decolla, che l'atmosfera rimane freddina, potreste fare essenzialmente due cose per salvare la situazione: dare fondo alla vostra riserva di champagne oppure proporre un gioco sociale. Rimando a un buon manuale di degustazione per la scelta dello champagne da tenere in cantina; io vi propongo una possibilità per la seconda soluzione, che è sicuramente più economica.

Prendete 40 persone a caso fra i vostri invitati privilegiando quelli che non conoscete, così desterete meno

---

[1] Dato che la tappezzeria è andata decisamente fuori moda, credo che bisognerebbe modificare questo modo di dire. Potremmo cominciare a dire "fare il poliuretano" oppure "fare la resina". Chissà, magari nel Rinascimento dicevano "fare l'affresco".

sospetti, e scommettete che fra questi 40 ce ne siano almeno 2 che festeggiano il compleanno lo stesso giorno dello stesso mese.

Può sembrare improbabile che si verifichi questa evenienza; non è così. Facendo un conto spicciolo, è evidente che la probabilità di indovinare la data di nascita di una persona è piuttosto bassa. Come ci insegna la base della teoria delle probabilità, dobbiamo contare i casi favorevoli e i casi possibili per questo evento.

Dunque, se voglio indovinare il giorno preciso, ho un solo caso favorevole su 365 possibili. (In realtà non è proprio così a causa degli anni bisestili: dovremmo considerare un anno ogni quattro come formato da 366 giorni; ma non cambia molto la sostanza del nostro discorso e in questa prima approssimazione non ne terremo conto.)

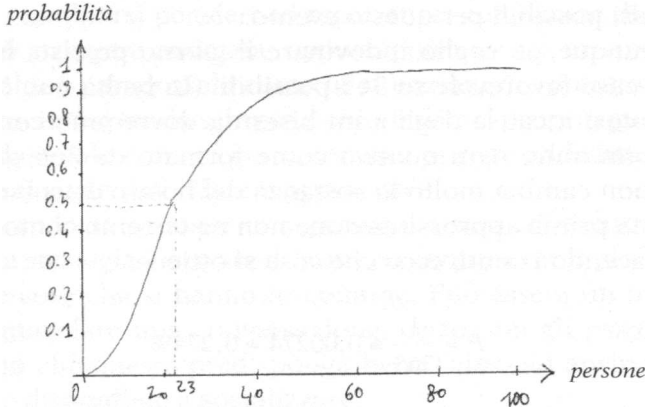
Facendo i conti, ecco che cosa si ottiene:

$$P = \frac{1}{365} \cong 0{,}00274 = 0{,}274\%$$

La probabilità di indovinare è poco meno dello 0,3%. Il che vuol dire che, statisticamente, questo esperimento dovrebbe riuscire 3 volte su 1000. Ma noi vogliamo vincere la scommessa! Non possiamo fare tante prove: ne abbiamo solo 40, ma le nostre condizioni sono un po' diverse. Quello che noi vogliamo non è indovinare la data fra 40 persone, ma "pretendere" che due persone fra le 40 presenti abbiano la stessa data di nascita. Data che, attenzione, non dichiariamo. E questo cambia del tutto lo scenario.

Esiste un famoso problema - noto anche come "paradosso del compleanno" (anche se non si tratta di un paradosso) - che stabilisce con precisione qual è la probabilità che due persone spengano le candeline lo stesso giorno.
Tradotto in termini più vicini al linguaggio dei matematici, scopriamo che il problema del compleanno calcola

la probabilità della coincidenza dei due eventi in funzione del numero di persone considerate. Nel grafico vengono riportate le probabilità di vittoria della scommessa sull'asse delle ordinate e il numero delle persone su quello delle ascisse. Come si vede, questa probabilità non cresce in maniera uniforme e lineare: ha una improvvisa impennata e poi tende ad assestarsi.



Intanto possiamo riflettere su alcune cose. La certezza di questo evento si avrà quando vengono prese in considerazione almeno 366 persone. Potremmo infatti chiedere a 365 persone di dirci la data di nascita e tutti potrebbero rispondere una cosa diversa dagli altri; ma la trecentosessantaseiesima non potrà che ripetere una delle date appena sentite. L'altra cosa da notare è invece come la curva si impenni subito, tanto che per avere più del 50% di probabilità è sufficiente prendere solo 23 persone! Cioè, in un gruppo di 23 individui presi a caso, è più probabile che due di essi festeggino il compleanno lo stesso giorno piuttosto che il contrario. Strano, vero? È possibile dimostrare questo teorema seguendo molte strade diverse. Una, ed è quella che abbozzo qui, è la strada... del gambero. Come dei "bastian

contrario", andiamo a cercare qual è la probabilità che due persone prese a caso compiano gli anni in due giorni diversi e proviamo a buttare giù una formuletta che ci dica quanto vale questa probabilità al variare del numero di persone. In seconda battuta considereremo la probabilità complementare. Il ragionamento è questo: data una qualunque persona del gruppo, ci sono 364 casi su 365 in cui il compleanno di una seconda persona cade in un giorno diverso; se si considera una terza persona, i casi sono 363 su 365 e così via. Formalizzata, la probabilità che tutti i compleanni cadano in date diverse in funzione del numero p di persone considerato, è:

$$P(p) = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots = \frac{365!}{365^p (365 - p)!}$$

Da questa formula, possiamo elaborare una comoda tabella di consultazione festosa che ci suggerisce quanto vale la nostra probabilità di vittoria al crescere degli invitati coinvolti. Eccola!

Strano ma vero

Compleanni segreti

Formulato nel 1939 dal matematico austriaco Richard von Mises, il problema del compleanno ha un ruolo piuttosto importante in crittografia, che si occupa di "oscurare" i messaggi e di renderli incomprensibili a chi non è autorizzato a leggerli. In particolare, il problema interviene nel dimensionamento del blocco di messaggio da cifrare. Per fare ciò, si impiegano algoritmi che si chiamano funzioni *hash* (dall'inglese *to hash*, "sminuzzare") crittografiche; il paradosso del compleanno serve per determinare la proprietà di "resistenza forte alle collisioni" ovvero, semplificando un po', la resistenza ai tentativi di interpretazione.

Numero partecipanti	Percentuale di successo
3	1%
10	12%
15	25%
16	28%
17	32%
18	35%
19	38%
20	41%
21	44%
22	48%
23	51%
24	54%
25	57%
26	60%
30	71%
34	80%
41	90%
55	99%

Ed ecco alcuni spunti di riflessione per curiosare ancora con questo bel risultato della teoria delle probabilità. Se non siete abituati a organizzare feste, potete provare a svolgere una piccola indagine usando l'ormai onnipresente Facebook, il più famoso social network del mondo.

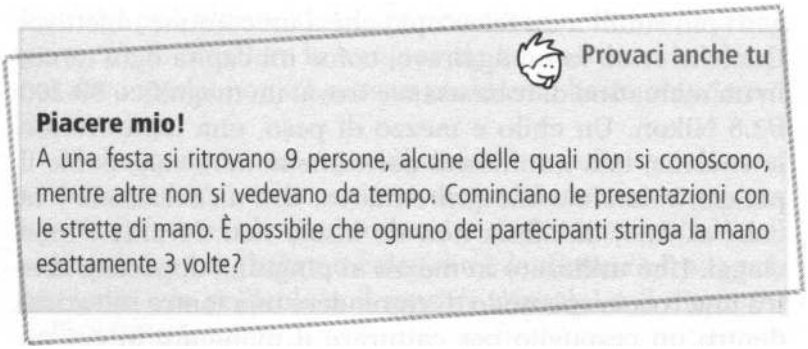
Potreste chiedervi ogni quanto capita che due vostri contatti compiano gli anni lo stesso giorno, tenendo conto di quanti amici avete.

Se poi i vostri amici sono tanti (io al momento ne ho più di 600, quindi mi capita di continuo), potreste aprire un account apposito, invitare il numero di amici che volete scegliendoli a caso e poi vedere ogni quanto si verifica

la coincidenza del compleanno. Oppure potreste provare a estendere il teorema a tre coincidenze, quattro e così via.

Nel corso dei miei itinerari di matematico curioso, mi è capitato di compiere molte volte questo esperimento con il mio pubblico. Una di queste - il gioco era riuscito alla perfezione - una persona mi chiese se la distribuzione delle nascite nel luogo geografico dove si propone il gioco avesse qualche connessione con la sua riuscita. In altre parole, una delle ipotesi, da cui si parte per esaminare attraverso la matematica questo problema, è l'equiprobabilità del giorni di nascita nel campione usato. E cioè, se si propone questo gioco in un posto dove la maggior parte delle persone è nata in determinate stagioni, questo potrebbe cambiare lo scenario. Ho un po' riflettuto su questo e credo che in effetti sia così: il problema prende per ipotesi l'equiprobabilità della data di nascita e, abbandonandola e quindi risolvendo un caso più generale, credo che i conti si complichino; ma non ho trovato ancora una risposta soddisfacente a questa bella domanda. Idee?

A proposito, buon compleanno![2]


Provaci anche tu
Piacere mio!
A una festa si ritrovano 9 persone, alcune delle quali non si conoscono, mentre altre non si vedevano da tempo. Cominciano le presentazioni con le strette di mano. È possibile che ognuno dei partecipanti stringa la mano esattamente 3 volte?

[2] Come ho fatto a sapere che oggi era il vostro compleanno? Non lo sapevo. In realtà, ho tirato a caso sperando che i miei lettori fossero abbastanza perché questo avvenisse con una certa frequenza. Se questo è successo e oggi è davvero il tuo compleanno, scrivimi! Potrebbe essere il primo passo di un nuovo esperimento di probabilità editoriale.

Paparazzi parabolici

Ormai in ogni festa vip che si rispetti ci devono essere i paparazzi appostati fuori della villa.

Mi ha sempre impressionato come i media siano morbosamente attaccati alla vita privata delle persone famose. A ogni modo, la fotografia è sempre stata una mia grande passione, anche questa tramandata da mio padre e messa in pratica prima con apparecchi di fortuna, poi con la sua reflex a pellicola e un unico obiettivo da 50 mm, e ora con la mia fida reflex digitale e il suo corredo di obiettivi, treppiedi, flash e accessori vari ed eventuali. Mi definirei un fotografo naturalista. Sono affascinato soprattutto dagli spettacoli naturali e sono attratto dai paesaggi, dagli animali rari o in pose curiose.

Credo che tutto questo abbia a che vedere con il mio amore per la Natura e con il desiderio di comprenderla e vivere in sintonia con il pianeta.

Per riprendere oggetti o esseri viventi lontani, magari anche di piccole dimensioni, è necessario impiegare obiettivi potenti, cioè con una lunga focale. Significa usare oggetti più simili a un telescopio che a un comune obiettivo. Qualche anno fa mi aggiravo, come mi capita ogni tanto, in un mercatino di roba usata e trovai un magnifico 80-200 f/2.8 Nikon. Un chilo e mezzo di peso, una lente frontale enorme, una luminosità decisamente notevole, come il prezzo, volendolo comprare nuovo. Era un'occasione e la colsi al volo; da allora non mi lascia mai durante i miei viaggi. L'ho utilizzato in mezzo ai pinguini, appostato dietro una roccia sperando di riprendere una lontra selvatica, dentro un cespuglio per catturare il momento in cui un rapace cattura un pesce sulla superficie di un lago. La cosa buffa è che ogni tanto lo uso anche in mezzo ad altre persone non avvezze a questo universo fotografico: tutti mi danno immancabilmente del paparazzo.

Credo che la fotografia mi sia sempre piaciuta anche perché coniuga la libertà di espressione artistica con la conoscenza di una tecnica e una tecnologia molto rigorose, in continua evoluzione, in particolare in questi anni. Forse sono gli stessi motivi per cui mi piace anche la matematica: tecnica e libertà espressiva.

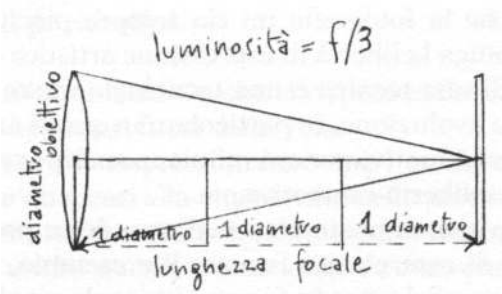
Mi sono spesso posto alcune domande in proposito, e non credo di essere stato l'unico. Per esempio, perché le stampe fotografiche hanno forma rettangolare se l'obiettivo è rotondo? Oppure, come mai la luminosità sale e scende con quei valori misteriosi come f/1.8, f/2.8, f/3.5? E ancora, quanti megapixel sono necessari per avere una buona fotografia? La matematica mi ha aiutato a rispondere anche a queste domande.

Cominciamo da un fattore importantissimo: la luminosità dell'obiettivo. Quasi mai questo dato viene preso in considerazione dall'utente medio, soprattutto quando deve scegliere una macchina compatta; in realtà è forse l'indice più importante per capire quale potrà essere la qualità delle fotografie.

Ogni obiettivo ha un numero che indica la massima luce che può filtrare al suo interno e ha un diaframma che permette di scegliere la luminosità; nei casi in cui volessimo diminuirla, non c'è nessun problema: basta chiudere il diaframma.

Molto spesso, però, specialmente in condizione di scarsa luminosità, è utile avere a disposizione una massima apertura favorevole. La luminosità degli obiettivi indica il rapporto fra lunghezza focale (che è la distanza fra la prima lente e la pellicola o il sensore digitale) e il diametro della prima lente.

La sequenza dei valori di numeri f è una progressione geometrica di ragione $\sqrt{2}$ (circa 1,4) standardizzata al congresso di Liegi nel 1905. Comprende i seguenti valori: f/1 f/1,4 f/2 f/2,8 f/4 f/5,6 f/8 f/11 f/16 f/22 f/32 f/45 f/64.

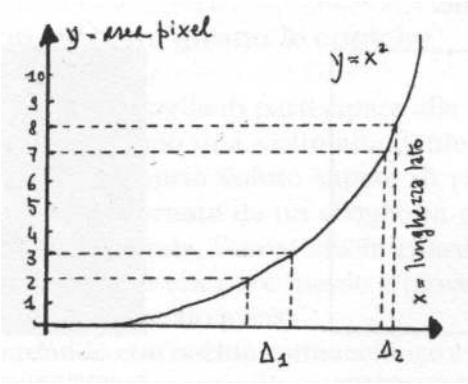


Altro dato interessante è il numero di megapixel di cui è composto il sensore di un corpo digitale. Oggi questo problema è stato ridimensionato, in quanto anche la macchina meno dotata ne ha a sufficienza per stampare una fotografia in grande formato senza evidenti difetti; fino a qualche anno fa, però, era un aspetto su cui puntavano molte campagne pubblicitarie. In realtà, avere tanti megapixel non significa solamente poter stampare in grande formato senza sgranare, ma anche poter scattare in condizioni difficili (come quando c'è poca luce) e avere prestazioni eccellenti in quanto a rumore e "sporcature" varie dell'immagine. Quello che pochi sanno, e che la matematica ci aiuta a capire in maniera molto diretta, è che più megapixel verranno aggiunti e meno si noterà la differenza. Vediamo perché.

La qualità di un'immagine viene giudicata dal nostro occhio in base a molti aspetti. Nel caso delle immagini digitali, ognuna diventa un insieme finito di "punti" a ciascuno dei quali viene associato un numero che indica il colore che assumerà il "punto" in questione. Li abbiamo chiamati "punti", ma nella realtà sono quadratini, i pixel (contrazione dell'inglese picture element). Più elevato sarà il loro numero e meglio sarà approssimata l'immagine originaria. E questo che il nostro occhio giudica: quanto una "scaletta" formata da tanti quadratini riesca ad approssimare una linea continua. Possiamo quindi dire che la qualità dell'immagine

è inversamente proporzionale alla dimensione de] lato di ogni quadratino che andrà a formare l'immagine stessa. Minore sarà il lato, maggiore sarà la qualità dell'immagine.

Quando andiamo a scegliere una macchina fotografica, però, i prodotti non sono sistemati sugli scaffali in base alla dimensione del lato del pixel bensì per numero di pixel, che ormai vengono direttamente misurati con il prefisso "mega" che indica "un milione di": quindi "3 megapixel" significa "3 milioni di pixel". Questa differenza è sostanziale; infatti, come sappiamo, le aree variano come il quadrato del lato che le genera. Quindi, se un lato è doppio di un altro, i quadrati che potremmo generare a partire da questi due lati avranno superficie una il quadruplo dell'altra e i cubi avranno volume otto volte quello dell'altro.

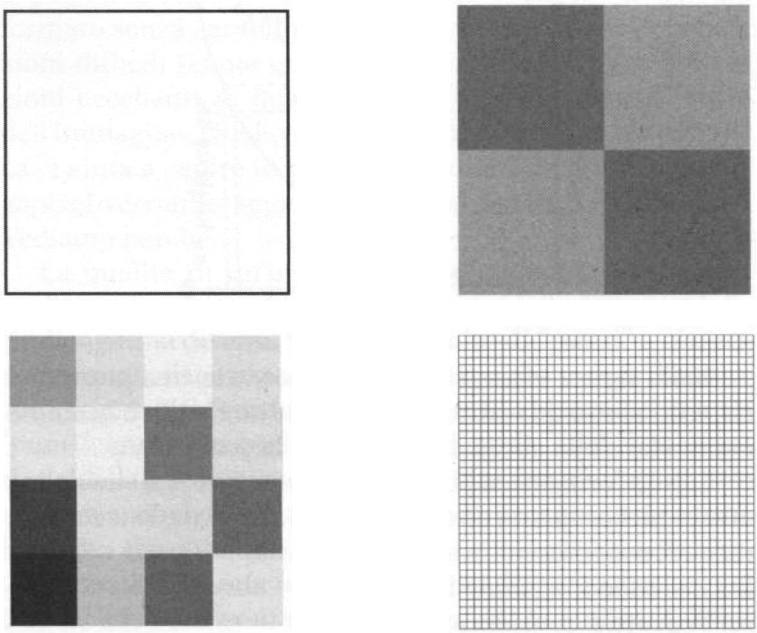


Nella figura viene riportato come varia una grandezza rispetto al suo quadrato. La curva che ne risulta è ben nota; è una star della geometria analitica, la parabola.

La sua funzione si può scrivere come y=x2 e il suo delinearsi ci racconta una cosa interessante. Provando a considerare alcuni intervalli sul grafico possiamo fare il raffronto fra... alcune macchine fotografiche, o almeno il loro sensore. Provate a considerare l'intervallo in ascissa che

va da 2 a 3 ($\Delta 1$) megapixel e quello che va da 7 a 8 ($\Delta 2$). La differenza in entrambi i casi è di 1 megapixel ma non corrisponde alla differenza di qualità. Infatti, proiettando sull'asse delle ordinate, è facile rendersi conto di quanto il salto di qualità sia molto maggiore nel primo caso. In altre parole, passare da un sensore da 2 a uno da 3 megapixel costituisce un grande miglioramento perché il lato del pixel è molto più piccolo; invece, passando da 7 a 8 megapixel, il lato sarà sì più piccolo ma non di molto.

Come varia questo decremento? Ce lo dice la nostra parabola e la formula che la disegna: varia in ragione della radice quadrata dell'area del pixel. Quindi, se volessi fare il ragionamento opposto e aumentare la qualità sempre della stessa ragione, dovrò aumentare moltissimo il numero di pixel. Per convincersi di questo, basta guardare la prossima immagine.



Come si vede, nel primo caso abbiamo il lato lungo uno e un solo pixel. Volendo dimezzare la dimensione del lato, passerei alla seconda immagine dove i pixel sono diventati 4. Volendo dimezzare ancora, passo alla terza immagine e i quadrati sono 16. Se dimezzo ancora passo a 64, poi passo a 256 e successivamente a 1024 e così via. Una progressione che porta molto presto ad avere numeri molto grandi. Si chiama progressione geometrica.

Morale della favola, non fatevi abbacinare dal numero di megapixel nella scelta di una macchina fotografica. Ormai ne hanno talmente tanti che potete quasi ignorare questo dato. Se poi vorrete investire in un obiettivo di lunga focale, potrete persino divertirvi a fare il paparazzo dei pinguini, proprio come me.

Stasera non esco: mi girano le coniche

Non sempre si ha voglia di partecipare alle feste.

Un venerdì sera dopo una settimana d'inferno: l'idraulico non ne aveva proprio voluto sapere di riparare quel tubo, io ero appena tornato da un viaggio in giornata alla sede centrale dell'azienda, l'aereo era in ritardo e, appena uscito dall'aeroporto, s'era pure messo a piovere... Non se ne parla. Stasera me ne sto a casa.

Così, guardando con occhio sonnacchioso e appesantito intorno a me, mi sono accorto che si possono ritrovare curve interessanti anche rimanendo tra le pareti domestiche: le coniche. In questo caso si tratta però delle superfici di rotazione che si formano quando una conica ruota attorno a un asse. Forse è perché anche io tirai fuori il mio asse (da stiro), forse perché quella sera un po'... mi giravano, che mi accorsi di tutto ciò.

Dopo aver buttato giù la porta con un calcio, in stile far west, mi ero tolto immediatamente tutti quei vestiti umidicci

lanciandoli ai quattro angoli della stanza. Missione numero uno: bagno bollente.

Uscito dalla vasca, la casa aspettava solo di essere abitata quella sera. Mi chiamava e io, vedendo attraverso le sue trasparenze la pioggia che si era trasformata in diluvio, non ebbi un attimo di esitazione a spegnere il telefono. Il richiamo più forte era quello del mio stomaco al quale avevo concesso una misera insalatina a pranzo e un croissant preso al volo all'aeroporto. Pensai che quel venerdì sera potevo concedermi una bella serata stile mercoledì di coppa fantozziano: divano a pochi centimetri dalla tv, otre di spaghetti, birrone gelato e... Decisi di contenermi e di sostituire l'ultimo elemento con un bel frappé. Latte, banane, cacao, vaniglia. C'era tutto. Allora cominciai i preparativi per questa serata in solitaria e feci come i marinai quando devono ammainare di colpo una vela: lasciai tutta la tensione. Il bagno bollente aveva svolto un buon lavoro in questo senso e ora profumavo anche di legno di sandalo. Cominciai a cucinare. Prima ci voleva un po' di immancabile buon jazz di sottofondo. Una voce femminile era l'accompagnamento delicato che doveva anche essere rotondo e "abbracciante": la scelta quindi cadde su Madeleine Peyroux.

Acqua sul fuoco, un paio di grissini alle noci e ricominciarono a ribollire idee, pensieri, domande e immagini. Mi accorsi che sia i grissini in piedi dentro il contenitore sia gli spaghetti che avevo appena buttato con una mossa tipo shogun formavano una superficie rigata, l'iperboloide a una falda (l'abbiamo vista qualche capitolo fa). Mi ricordai allora che il suffisso -oide si aggiunge al nome di una curva quando vogliamo indicare una superficie che è ottenuta dalla rotazione della stessa attorno a un asse.

Interessante, certo, ma dovevo ancora fare il sugo. Data l'impronta fortemente campanilista della serata, mi orientai verso un classico del menù dell'italiano che ha voglia di

solleticare il palato facendo il minimo dello sforzo: aglio, olio e peperoncino. In quattro e quattr'otto era pronta. Perché essere banali?, pensai. Aggiunsi tabasco, acciughe sotto sale e pangrattatto ottenuto sottraendo all'iperboloide formata dai grissini un po' di linearità sbriciolandone a mano un paio.

Spaghetti al dente, è ovvio. A me piacciono proprio appena usciti dal campo di definizione di spaghetto crudo, quindi in sei minuti erano pronti. Ma erano davvero tanti. Decisi perciò di condirli dentro una grossa padella dallo strano nome: il wok. Nel prenderlo dallo scaffale, notai che la sua forma era qualcosa di noto, forse un'altra conica di rotazione, chissà. Poteva darsi che fosse stata studiata in termini matematici per essere così panciuta e capiente: forse era metà di un ellissoide, la superficie che si ottiene facendo ruotare l'ellisse. In quel momento, però, stavo già pregustando la carnosità degli spaghettoni che mi guardavano dallo scolapasta: la loro consistenza era come un nido di serpi pronte a scivolare via. Non dovevo farli assolutamente scuocere: buttai tutto nel wok che misi pronto sulla fiamma più bassa, quella che si usa per il caffè. Un fantastico profumino iniziò a volteggiare nel cubo fra il piano cottura e la cappa che accesi per farlo allungare nella canna fumaria. Tutto pronto.

Quel piattone di pasta reclamava l'accompagnamento di un buon vino, così mi versai un bicchiere di Morellino di Scansano, un toscano rotondo e profumato, oltre che intenso e tannico quanto bastava per l'occasione.

Cominciai ad assaporare quella delizia ma, dopo tre o quattro forchettate, imboccai una presa stracolma di tabasco. Avrei dovuto ricordarmelo: quando si mescola un fluido, ci sono punti che rimangono immuni al mescolamento; sarei dovuto andare più cauto. Resta il fatto che uno dei momenti peggiori per pensare alla topologia è quando ti si apre dritta in bocca la porta dell'inferno, girone degli

anti-spezie, dove diavoletti rosso fuoco ti nutrono per contrappasso a peperoncini di Soverato per l'eternità. Mi precipitai verso il rubinetto e spalancai la manetta dell'acqua. Il profilo parabolico mi guardava divertito mentre fiotti d'acqua cercavano di spegnere l'incendio, o per lo meno di ridurlo a carbonella.

Mi hanno ripetuto non so quante volte che in questi casi non bisogna bere acqua ma mangiare un pezzo di pane o altro. Balle, io mi sarei fatto la doccia criogenica, se solo avessi potuto. Per fortuna passò subito e mi rimase in bocca solo un po' di pizzicore, che tra parentesi adoro; proseguii nei lavori di demolizione del grano duro. Ero più rilassato e così bevvi un po' di Morellino, non prima di averlo fatto roteare nel bicchiere a tulipano per gustarmi il suo fantastico aroma: profumi di frutti rossi e di erbe.

Mi vennero in mente le lezioni del corso di sommelier e mi misi a guardare gli archetti formati dal vino sul bordo del bicchiere. Avevo imparato che più il vino è alcolico più archetti si formeranno a causa del maggior contenuto di glicerina. Ipotizzai allora che la glicerina avesse un peso molecolare maggiore degli altri costituenti del vino; per questo tendeva a "cadere di più". Gli archetti erano simili alla parabola rovesciata; meglio ancora, sembrava una catenaria. Era stato Galileo, pensai, a tirare in ballo per primo la catenaria per differenziare la forma del profilo di una fune appesa proprio dalla parabola.

Così il morale mi si risollevò e cominciai a fantasticare: avrei seguito l'esempio del grande toscano e avrei compiuto esperimenti di lancio del grave dal tetto del mio palazzo, diventando così lo scienziato del quartiere a tutti gli effetti. A volte, quando scivolo in questi pensieri grottesco- fantasy, controllo quanto ho bevuto e mi rendo conto con rammarico che li faccio anche da sobrio. Nel caso specifico ero ancora al primo bicchiere: meglio riempirlo di nuovo e addossare poi la colpa al Morellino. A furia di far girare

rosso nel bicchiere, mi ricordai che il frappé mi stava aspettando; così, ripulito il piatto con l'ultimo respiro del mio iperboloide di spaghetti, dopo aver dato un'occhiataccia al profilo parabolico del rubinetto che si era fatto beffe di me, mi rimisi al lavoro.

Tagliai con cura la banana in pezzetti omogenei e li tuffai nel latte. Cacao, vaniglia e un'ombra di zucchero liquido. Tappai tutto e diedi il via a un elettrodomestico giro di walzer. Guardai la superficie del mio dessert: avevo davanti proprio un'altra conica di rotazione. Be', più rotazione di così! Era un paraboloide questa volta: la superficie che si ottiene facendo ruotare una parabola attorno al proprio asse.

Mi ricordai di quando vidi le formule per ottenere questa superficie proprio a partire da un liquido, dentro un bicchiere, che viene trascinato dalla sua inerzia e si inerpica così sulle pareti del contenitore. Un paraboloide di rotazione, interessante. Interessante anche come a seconda della viscosità del liquido la parabola cambi forma da stretta e acuta, quasi gotica, nei fluidi molto liquefatti fino a panciuta e seduta come una scodella nei liquidi più densi. Il mio frappé era una vera bomba calorica, quindi il fatto che il paraboloide fosse più che panciuto aveva un senso.

Decisi allora di restare in tema e mi avvicinai alla televisione, dotata di impianto satellitare e antenna parabolica. Anche lei, come fosse stata plasmata da un frullatore, mi restituì un mix agrodolce di sapori televisivi che i miei occhi consumarono mentre trangugiavo il frappé da un bicchiere le cui dimensioni ricordavano più che altro un secchio da lattaio. Nell'impianto televisivo era importante sapere dove si trova il fuoco del paraboloide perché le onde raccolte sulla sua superficie venissero riflesse e convogliate nell'unico punto dove era sistemato il ricevitore (transponder, per i più satellitari fra voi). Raccogliere quante più onde e migliorare la qualità del segnale era possibile grazie

alla proprietà della parabola di riflettere i raggi che arrivano paralleli al suo asse in un solo punto, il fuoco. Mi tornò in mente che mentre stavo tornando a casa anche il taxi aveva fatto uso di questa qualità quando, accendendo i fari, faceva compiere alla luce il percorso contrario rispetto alle onde televisive del satellitare. La luce della lampada posta nel fuoco si rifletteva perfettamente parallela al suolo. In questo modo si può usare una luce molto intensa senza dar fastidio a chi ci sta venendo incontro sull'altra carreggiata. Alzai lo sguardo e vidi che i faretti del controsoffitto erano fatti più o meno così. Non avevo bisogno neanche di uscire per trovare un paraboloide riflettente. Decisi allora che era il momento di andare a dormire: se avessi visto coniche anche in sogno, il giorno dopo sarei entrato in analisi.

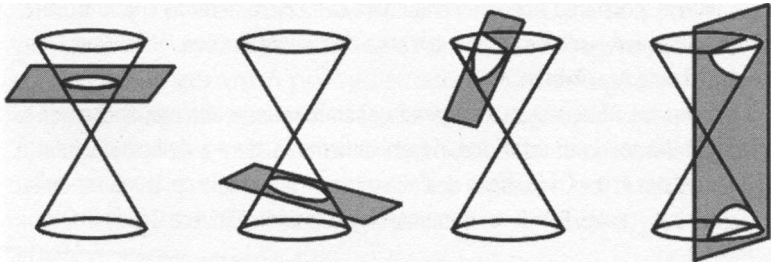
VIP: Very Important Points

Si sa, quando uno è considerato un VIP (acronimo di Very Important Person), deve darsi un tono. Deve sempre essere impeccabile, vestito all'ultima moda, frequentare i locali giusti, guidare una bella macchina, magari un SUV da quattro tonnellate anche se è sempre da solo, ed essere sempre, in qualsiasi stagione, abbronzatissimo.

Chi è un vero VIP infatti si abbronza costantemente perché può permettersi di andare al mare d'estate e a sciare d'inverno. Certo, poi rimangono delle fasce semivuote in cui magari uno prova anche a lavorare e non ha il tempo di abbronzarsi. Ma soprattutto c'è una larga schiera di persone che, pur non essendo "veri VIP", vogliono atteggiarsi come tali: quindi devono essere abbronzati nonostante non vadano né al mare né a sciare. E così, tutto l'anno capita di incontrare tipi che, pur non avendo magari mai visto una pozza d'acqua più grande della vasca da bagno, sembrano veri lupi di mare da quanto sono neri; a volte hanno la pelle

completamente asciutta, desertificata, riarsa ma si sentono ancora un po' bianchicci e allora vanno a farsi un'altra lampada. Io non sono un esperto in dermatologia; posso però arrivare a capire che prendere troppo sole può fare male, ma non prenderne affatto può non essere comunque salutare: per questo motivo qualche volta anch'io sono capitato nel gruppo dei famosi vacanzieri delle isole "Lampados".
Una volta ho fatto la doccia solare e devo dire che è stata un'esperienza davvero... illuminante. Ho deciso di farla con spirito che contraddistingue quasi tutte le cose che provo per la prima volta: la curiosità. Così un giorno - avevo già testato la normale lampada facciale - decisi che era venuto il momento di compiere il gran balzo. Devo ammettere che è stato davvero piacevole: adoro il caldo e la stagione estiva, quindi rimanere per qualche decina di minuti completamente avvolto dal calore mi ha fatto sentire bene.

Malgrado il senso di rilassatezza, la mia mente non ha smesso di girare e anche a me, oltre alle lampade ad alta pressione, si accese una lampadina. Quando entrai nella cabina, infatti, notai che la sua forma sembrava proprio ellittica. L'ellissi è una delle tre sezioni coniche. Le altre due sono la parabola e l'iperbole. In figura c'è un assaggio di come poter ottenere queste curve immaginando di tagliare un cono con un piano a seconda della sua inclinazione.
Da notare che, nel caso in cui il piano fosse perpendicolare all'asse del cono, l'ellisse è in realtà una circonferenza.



Una proprietà di queste curve risiede nel posizionamento dei loro fuochi.

I fuochi delle coniche sono punti speciali che servono per la loro definizione matematica e anche per la loro costruzione. Rappresentano punti particolarmente utili in termini geometrici, quindi questa interessante proprietà matematica può essere usata nell'ottica geometrica.

Si tratta di quel campo di applicabilità in cui la luce può essere vista come un raggio luminoso che si propaga nella direzione di diffusione. Sottolineo che questo dell'ottica geometrica è un utile modello che però, come tutti i modelli, non può essere sempre applicato; per esempio non è possibile vedere la luce come un semplice raggio se ne dovessimo studiare le componenti in frequenza (i colori, per la luce visibile), oppure se dovessimo capire cosa succede a un'onda del mare che si infrange su una diga con alcune aperture. In questi casi, e in molti altri, è necessario trattare la luce come un'onda che si propaga nello spazio e non come un semplice raggio.

Pazzi, pazzi teoremi

Generalmente rotondo

È possibile considerare la circonferenza come un caso particolare di ellisse. Esiste una formula molto elegante per generalizzare il calcolo dell'area dell'ellisse a partire da quello della circonferenza. Chiamati A e B i semiassi dell'ellisse, possiamo ricordarci che l'area della circonferenza si può trovare trovare come $A_{circ}=R \cdot R \cdot \pi$. Ebbene, l'area dell'ellisse si trova molto semplicemente come $A_{ell}=A \cdot B \cdot \pi$.

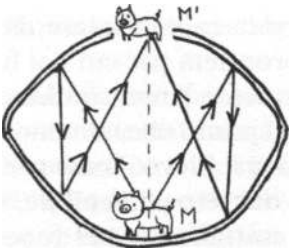
E non basta! Abbiamo una elegante generalizzazione analoga anche per il volume del solido di rotazione, rispettivamente la sfera e l'ellissoide. Infatti chiamati ora A, B e C i semiassi dell'ellissoide, se la formula per il volume della sfera era $V_{sfera}=4/3 \cdot R \cdot R \cdot R \cdot \pi$, il volume dell'ellissoide è invece $V_{ell}=A \cdot B \cdot C \cdot \pi$.

Tornando dentro la cabina solare dalla forma ellittica, mi ricordai della proprietà per cui nei fuochi dell'ellisse si concentra maggiormente l'intensità luminosa. Quindi, con un salto, mi misi sul punto che, almeno dopo un calcolo "a occhio", mi sembrava il fuoco. Forse per suggestione, forse perché l'effetto era davvero percepibile, mi parve di sentire più caldo: rimasi esattamente nel fuoco, contento di far fruttare al meglio quella piccola spesa.

Un altro caso in cui viene usata una proprietà simile a quella della lampada è in una specie di giocattolo che si trova facilmente nei negozi di articoli goliardici. Questo gioco riguarda un maialino e un doppio specchio a sezione parabolica, un'altra curva conica.

La parabola ha la particolare proprietà di far convergere perfettamente i raggi che si riflettono su di essa nel suo fuoco. A dirla tutta, questa è una proprietà di tutti gli specchi concavi, ma nel caso della parabola non sussiste il fenomeno dell'aberrazione; dunque possiamo dire che i raggi concentrati nel fuoco sono anche perfettamente... a fuoco. Questo significa avere una grande concentrazione dell'energia luminosa che viene raccolta e infatti i moderni telescopi usano specchi fatti più o meno in questo modo. Ma nel caso del maialino, che in realtà è solo un pupazzetto, possiamo creare un vero ologramma.

Come? Il gioco ci fornisce un kit con due specchi parabolici da montare uno sull'altro e, appunto, il maialino che viene messo in fondo, nei pressi del fuoco della parabola. In questo modo, come si vede in figura, tutti i raggi che partono dal maialino che andranno a sbattere sullo specchio, convergeranno poi nel fuoco dell'altra parabola, dove c'è una piccola apertura. È davvero curioso vedere come l'immagine del maialino si riproduca perfettamente sulla sommità di questa strana forma a pallone da rugby e si ha subito l'istinto di poterlo toccare, ma rimarremmo a mani vuote.



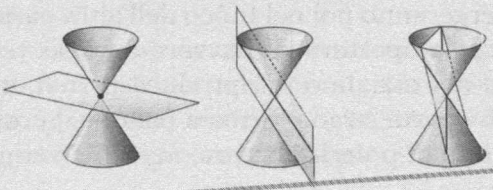
Questa proprietà delle parabole è molto usata al giorno d'oggi e sembra che uno dei primi a impiegarla fu niente meno che Archimede il quale, si narra, utilizzò enormi

Strano ma vero

Curve... degeneri!

Ebbene sì, anche le curve possono essere degeneri. E non succede quando tornano a casa alle tre del mattino ubriache, bensì quando la loro natura di curva si semplifica a tal punto da non essere più una curva. Un esempio è quello della circonferenza. Quando il raggio è maggiore di zero, avremo una circonferenza più o meno grande, ma quando è esattamente zero la circonferenza si ridurrà a un solo punto, il suo centro. In questo caso essa degenera a un punto. Anche l'ellisse può degenerare in un punto, mentre la parabola può essere tanto "stiracchiata" da degenerare in una retta. L'iperbole, invece, avendo di solito due rami degenera in due rette incidenti.

La degenerazione avviene quando immaginiamo di spostare il piano la cui intersezione genera le coniche, in posizioni particolari. Si tratta del momento in cui il piano passa per il vertice del cono. In questo punto particolare, nei tre rispettivi casi, si formano le coniche degeneri.



specchi parabolici per convogliare la luce del sole sulle navi nemiche di Marcello nell'assedio di Siracusa del 212 a.C., incendiandole.

Questa è solo una leggenda, anche perché è improbabile che all'epoca si potesse costruire una superficie riflettente di così grandi dimensioni se non attraverso l'uso di metalli fusi i quali farebbero attestare il peso dell'oggetto sulle tre tonnellate.

Anche ammesso di riuscire a fare questo, la luce raccolta direttamente dal sole orientando lo specchio verso l'alto, avrebbe potuto focalizzare sì i raggi, ma sempre sullo stesso asse, in un punto lungo la congiungente specchio-sole, cioè lungo un percorso impossibile per una nave in mare. Molto più probabilmente la luce veniva riflessa da una serie di specchi piani orientati e composti ad approssimare la concavità di uno specchio curvo.

La parabola però viene usata per questa sua proprietà anche in altri ambienti per convogliare onde (luminose o no) oppure per fare uscire i raggi tutti paralleli.

Il primo caso è quello della famosa parabolica e del meno noto transponder, l'oggetto deputato a raccogliere le onde

Provaci anche tu

Generare le coniche

Volete provare anche voi l'ebbrezza di generare le sezioni coniche nella vostra camera da letto? Niente paura, è sufficiente che accendiate la vostra brava abat-jour e poniate un foglio di carta sopra la lampada. Per generare una circonferenza sarà sufficiente mettere il foglio parallelo al pavimento, per l'ellisse basterà inclinare un po' il foglio. Quando raggiungerete un'inclinazione tale per cui il foglio sarà invece parallelo ai raggi che fuoriescono dal paralume, allora starete intercettando una parabola e continuando a inclinare formerete un'iperbole (o meglio un ramo d'iperbole).

televisive riflesse dalla parabolica e focalizzate verso il suo fuoco, dove puntualmente si trova il transponder.

Il caso opposto è invece quello dei fari anabbaglianti dell'automobile. Mettendo una lampada potente nel fuoco e rivestendo l'interno del faro a sezione parabolica di materiale riflettente, è possibile orientare molto bene la luce in quanto i raggi uscenti saranno tutti paralleli all'asse della parabola e dunque potranno essere orientati per illuminare la strada e non gli occhi dei conducenti che guidano nella direzione opposta alla nostra.

Le coniche rappresentano quindi un ottimo esempio di come la matematica possa essere utile e permei la nostra vita quotidiana. Dai coni gelato alle partite nel satellitare, usare a proprio vantaggio alcune proprietà che sono state dimostrate dai teoremi può migliorare concretamente la qualità della nostra vita.

9

MATEMATICA? YES WE CAN!

QUANDO I POLITICI POSSONO DARE I NUMERI

9

A proposito di politica... ci sarebbe qualcosa da mangiare?

Totò

Devo studiare politica e guerra perché i miei figli possano avere la libertà di studiare matematica e filosofia.

John Adams

Cocco bello!

In spiaggia capita spesso di incontrare i venditori di cocco. A me mettono allegria e qualche volta mi sono comprato una bella fetta di cocco per rinfrescarmi.

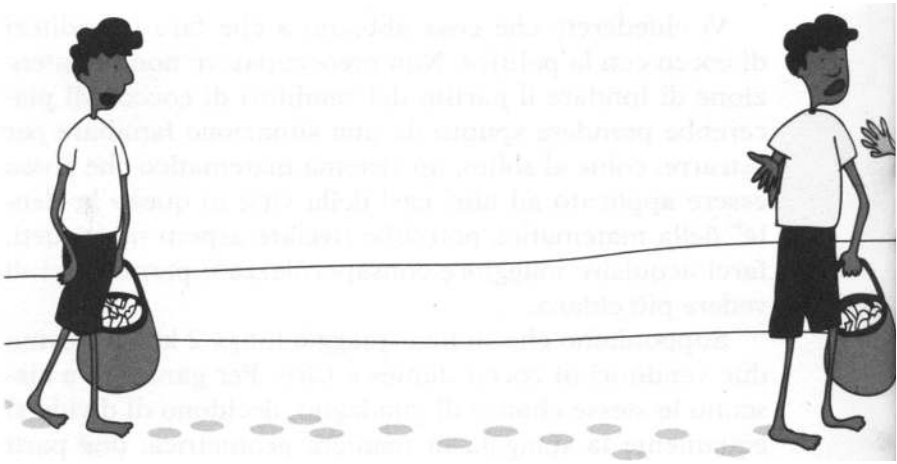
Vi chiederete che cosa abbiano a che fare i venditori di cocco con la politica. Non preoccupatevi: non ho intenzione di fondare il partito dei venditori di cocco. Mi piacerebbe prendere spunto da una situazione familiare per astrarre, come al solito, un sistema matematico che possa essere applicato ad altri casi della vita; in questi la "lente" della matematica potrebbe rivelare aspetti inconsueti, farci acquisire maggiore consapevolezza e permetterci di vedere più chiaro.

Supponiamo che su una spiaggia lunga 2 km si trovino due venditori di cocco: James e Ciro. Per garantire a ciascuno le stesse chance di guadagno, decidono di dividersi equamente la spiaggia in maniera geometrica: due parti uguali di 1 km ciascuna. Ogni venditore, invece di vagare

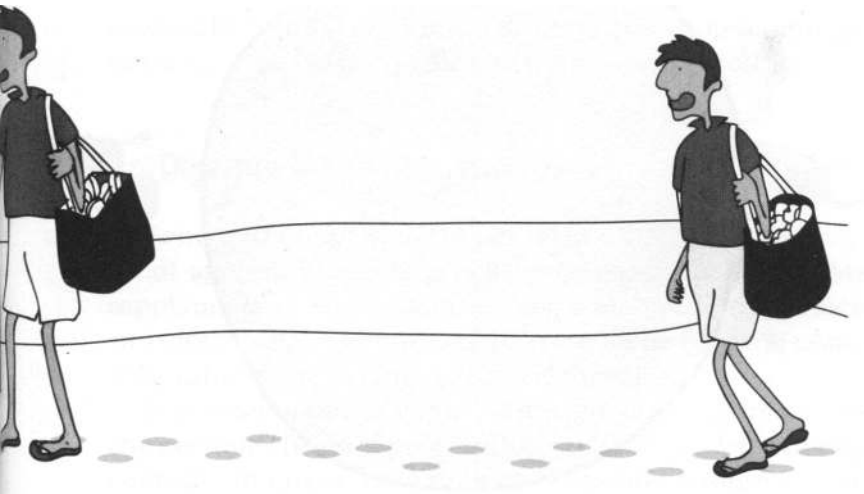
per tutta la spiaggia, si metterà al centro del proprio territorio e aspetterà che gli interessati arrivino; perciò ogni venditore si posizionerà a 500 metri dalla fine della spiaggia e quindi a 1 km dall'altro. Dopo un po', James si accorge che, se si avvicinasse un po' al centro della spiaggia, potrebbe "catturare" più clienti. In questo modo, oltre a conservare i propri, andrebbe a trovarsi in un punto più vicino ai bagnanti vicini al confine che spetterebbero a Ciro.

Così ruba un po' di clienti a Ciro il quale, appena si accorge della mossa del collega, fa altrettanto; anzi, si mette ancora più vicino al confine. Ma James non vuole avere meno possibilità di Ciro e risponde con un altro movimento verso il centro e così via. Piano piano, si avvicineranno tutti e due al centro della spiaggia tradendo platealmente il patto iniziale.

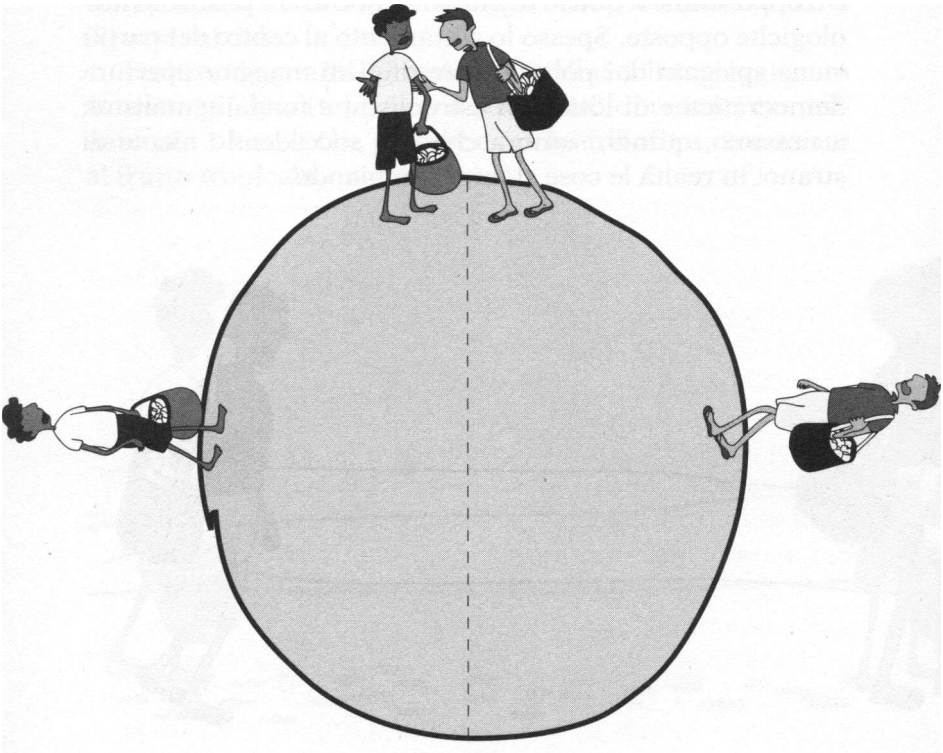
Inoltre, i bagnanti agli estremi confini della spiaggia non avranno più il cocco fresco a 500 metri: dovranno camminare per 1 km, il che potrebbe anche indurli a rinunciare al frutto tropicale.



Qualcuno pensa che in politica sia successo (e stia succedendo) la stessa cosa. Per accaparrarsi più voti, i partiti cercano di avvicinarsi a posizioni di centro fino a quando, come i due venditori di cocco, si trovano quasi nello stesso punto della spiaggia. Due ipotetiche coalizioni, pur di accontentare più persone e rastrellare quanti più voti possibile, si potrebbero trovare ad avere programmi, intenti e obiettivi pressoché identici (rispettarli è un'altra storia). Come nel caso di James e Ciro, a mano a mano che i partiti spostano il proprio asse verso il centro, scontentano chi ha posizioni saldamente di destra o di sinistra fino a quando qualcuno potrebbe rinunciare al cocco, cioè rinunciare a votare, visto che il programma del partito che lo dovrebbe rappresentare è troppo simile a quello di chi dovrebbe avere posizioni ideologiche opposte. Spesso lo slittamento al centro dei partiti viene spiegato dai politici in termini di maggior apertura democratica e di lotta agli estremismi e fondamentalismi; a nessuno, quindi, sembra che stia succedendo niente di strano: in realtà le cose stanno



Qualcuno pensa che a volte gli estremi coincidano, anche in politica, che alcuni estremismi o fondamentalismi abbiano radici comuni. Dal punto di vista matematico, dire che gli estremi coincidono è una richiesta molto ben determinata: significa che, al posto di muoversi su un segmento di retta, come prima, ci stiamo muovendo su una superficie nettamente diversa, dove una volta arrivati alla fine si ritorna automaticamente all'inizio. Si passa cioè da un segmento con gli estremi in due punti diversi a un segmento con gli estremi nello stesso punto ovvero una circonferenza. Da vendere il cocco su una spiaggia lineare a venderlo su... un atollo!



È interessante notare che in questo modello non serve a niente fare i furbetti: ogni volta che ci si sposta dalla propria posizione, ci si avvicina ad alcuni clienti del concorrente ma, al tempo stesso, ci si allontana da alcuni dei nostri.

Proseguendo nell'analogia, potremmo consigliare a chi fa politica che, se l'intento è acchiappare più elettori, fare il gioco di avvicinarsi al centro serve a poco: chi è più vicino agli estremi della spiaggia non si sente rappresentato.

Se vi sembra incredibile fare la stessa matematica su una circonferenza piuttosto che sulla "solita" retta dei numeri, pensate a quello che fate quando guardate l'orologio!

Immaginiamo che siamo le 11 di sera, cioè le 23. Un vostro familiare va a una festa e ha bisogno che lo andiate a prendere: vi dà appuntamento "tra tre ore". Voi mentalmente, oltre a lamentarvi dell'ora tarda, fate un'operazione con i numeri disposti su una circonferenza: state pensando che dovete andare a recuperarlo alle due di notte; l'operazione è cioè 11+3=2. Ma sappiamo tutti che 11+3 dovrebbe fare 14! In effetti sarebbe così se usassimo le 24 ore e stessimo parlando delle 2 del pomeriggio, ma anche in questo caso, scadute le 24 ore si ricomincia da capo ripetendo sempre gli stessi numeri. Un po' quello che fanno anche i politici.

Proporzionale e maggioritario

Sentiamo questi termini nei telegiornali, nei programmi di approfondimento e nelle propagande politiche. Ma sappiamo cosa vogliono dire? Lasciamo perdere i tecnicismi: grazie alla matematica è davvero facile rendersi conto della differenza fra i due sistemi elettorali.

Il problema che si vuole risolvere è come scegliere poche persone che ne rappresentino molte in un determinato contesto, in questo caso politico. Potrebbe sembrare

semplice da risolvere, invece riserva qualche sottigliezza, e anche qualche insidia.

Supponiamo che un Paese sia chiamato a votare i suoi rappresentanti e che, per semplicità, ci siano soltanto due partiti. Lascio uno spazio , per permettere a ciascuno di voi di fare la battuta che preferisce e, se crede, sorridere mentre legge.

Chiameremo questi partiti i Bianchi e i Colorati. Il Paese conta 1.000.000 di elettori aventi diritto al voto e supporremo che si rechino tutti alle urne per eleggere 100 deputati. Arriva il giorno della votazione, la tensione cresce e poi escono finalmente i risultati: il partito dei Colorati vince sui Bianchi con 520.000 contro 480.000 voti. Bene, e ora quanti deputati spettano a ciascuno schieramento? Utilizzando il sistema proporzionale, il nome stesso ci dice che il numero dei deputati viene calcolato in proporzione ai voti raccolti; basterà impostare una semplice proporzione in cui si esplicita che il rapporto fra il numero di deputati deve essere di 520.000 su 480.000 e che la somma del numero dei deputati sia 100. Possiamo chiamare il numero dei deputati dei Colorati con la lettera "c" e il numero dei deputati dei Bianchi con la lettera "b". Quindi,

$$c:b=520.000:480.000$$

Di conseguenza, impostiamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{c}{b} = \frac{520.000}{480.000} \\ c+b=100 \end{cases}$$

Da cui otteniamo che

$$c = \frac{520.000 \cdot 100}{1.000.000} = 52$$

Dunque i deputati per lo schieramento vincitore dei Colorati sono 52 e quelli dei Bianchi sono 48.

Fin qui tutto è abbastanza liscio e lineare; infatti questo sistema non è adottato quasi in nessun Paese!

Nel caso del sistema maggioritario, le cose starebbero in maniera diversa. Supponiamo che i votanti siano equamente distribuiti in un certo numero di collegi, per esempio 100, e che ogni collegio debba eleggere un deputato. Se gli elettori fossero distribuiti equamente, vorrebbe dire che tra i 520.000 elettori dei Colorati ce ne sarebbero 52.000 per ciascun collegio. Ogni collegio quindi eleggerebbe un deputato dei Colorati e in parlamento ci sarebbero 100 deputati (cioè la totalità) dei Colorati. È fondamentale notare come si siano ottenuti due risultati molto diversi mantenendo esattamente gli stessi numeri di prima.

Ma non è finita qui. Infatti è quasi impossibile che gli elettori siano equamente distribuiti nei collegi. Ipotizziamo allora un'altra distribuzione e vediamo che succede con il metodo maggioritario.

Collegi (in totale sono 100)	Numero elettori dei Bianchi (per ogni collegio)	Numero elettori dei Colorati (per ogni collegio)
da 1 a 40	0	10.000
da 41 a 100	5.200	4.800
Totali	312.000	688.000

Cerchiamo di capire bene la tabella prima di trarre le conclusioni. Nei primi 40 collegi c'è una vittoria schiacciante dei Colorati: addirittura non si trova un sostenitore dei Bianchi, neanche una vecchina imbonita, un giovinastro raggirato, niente di niente. Supremazia totale dei Colorati, che spadroneggiano con 10.000 voti a favore su 10.000 votanti e racimolano un totale di 400.000 voti con i primi 40

collegi, en plein. Ma negli altri 60 collegi accade qualcos'altro: i Bianchi prendono 5.200 voti a collegio contro i 4.800 dei Colorati; quindi ai Bianchi va il seggio di deputato di questi collegi. Tirando le somme, i Colorati si aggiudicano i primi 40 deputati e i Bianchi i restanti 60, vincendo di fatto le elezioni. Però, se guardiamo i voti totali, i conti non tornano: i Colorati hanno addirittura ottenuto più voti dei Bianchi, con uno schiacciante 688.000 contro un misero 312.000. Con il sistema maggioritario, quindi, non conta soltanto quanti sono gli elettori ma come sono distribuiti.

Riassumendo e prendendo come esempio quest'ultima simulazione, vediamo che cosa succederebbe nei sistemi visti, cioè nel proporzionale e nel maggioritario.

- Proporzionale: in questo caso i conti sono presto fatti. Su un totale di 100 deputati e approssimando un po', 69 andranno ai Colorati e 31 ai Bianchi. I Colorati hanno la maggioranza dei cittadini dalla loro parte e hanno vinto le elezioni.
- Maggioritario: i Colorati si aggiudicano i primo 40 collegi perdendo nei restanti 60, quindi di fatto perdono le elezioni pur avendo avuto il voto della maggioranza dei cittadini.

Abbiamo supposto per semplicità che ci siano solo due partiti, ma il ragionamento è analogo (solo un po' più complicato) nel caso fossero di più. Il sistema proposto equivale a una scelta binaria del tipo "sì" o "no" (nel nostro caso erano rappresentati dai Bianchi e dai Colorati).

La situazione è paradossale, in quanto avviene che la maggioranza eletta non rappresenta la volontà degli elettori. L'evenienza non è solo teorica perché accade continuamente, anche nel nostro Paese.

Questa impasse è superabile, dal punto di vista matematico, cambiando il sistema di valutazione dei partiti,

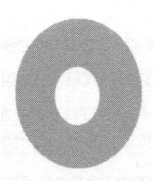
passando da una semplice scelta alla composizione di una lista di preferenza. In questo caso, l'elettore non può limitarsi a votare per un partito o esprimere la preferenza nominale a un politico, ma deve mettere in ordine di preferenza tutti i partiti in lista. In questo modo è possibile superare situazioni paradossali dovute alla coagulazione geografica di elettori di un partito. Ovviamente questo tipo di votazione è molto più complesso e richiederebbe da parte dell'elettore uno sforzo ben maggiore; infatti lo si considera inapplicabile, visto il grado attuale di educazione civica nel nostro Paese.

Aggiungo una nota personale. Sappiamo bene che esistono zone geografiche dove è più sentita l'influenza di un partito. Chi nasce in queste zone è più probabile che propenda per un certo partito piuttosto che per altri. Supponiamo che chi cresce in tale ambiente rimanga, bene o male, legato a un'ideologia senza sconvolgere il fronte delle proprie convinzioni, cosa che spesso accade, almeno a chi non fa politica attivamente. Come abbiamo appena visto nell'esempio, il fatto che gli elettori siano maggiormente distribuiti geograficamente ha giovato al partito, addirittura facendogli vincere le elezioni. Di conseguenza, una distribuzione geografica più uniforme delle ideologie, e quindi degli elettori che le sostengono, che muovono (o che dovrebbero muovere) un partito politico, porta ad avere una più alta probabilità di vittoria con il sistema maggioritario.

Morale della favola: se siete un partito che vuole vincere le elezioni in un Paese a sistema maggioritario, vi conviene sponsorizzare l'emigrazione, il movimento dei cittadini nel Paese (in modo da cambiare la composizione del corpo elettorale dentro i collegi) e abbattere quanto più possibile le barriere che impediscono o che inibiscono tale pratica.

APPENDICI

NUOVI NUMERI PER UN NUOVO MILLENNIO
SOLUZIONI
RINGRAZIAMENTI
RISORSE

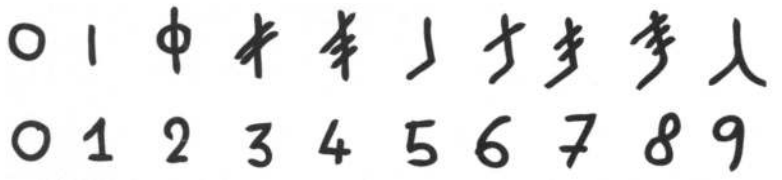


NUOVI NUMERI PER UN NUOVO MILLENNIO

Negli ultimi anni circola la voce che gli studenti italiani sono indietro rispetto ai loro coetanei in Europa, se non addirittura nella gran parte del mondo occidentale, nell'apprendimento della matematica. Questa notizia è ben motivata dalle indagini internazionali PISA (Programme for International Student Assessment), promosse dall'Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico (OCSE), per misurare i livelli di competenze (literacy) dei quindicenni scolarizzati in lettura, matematica e scienze. Sottolineato da ministri, intellettuali, politici e alti funzionari del nostro Paese e, non ultimo, da molti giornalisti, questo dato appartiene a un terreno alquanto accidentato e difficile da decodificare. Un terreno dove vengono mescolati aspetti riguardanti la nostra organizzazione, specie nel campo dell'istruzione, ma anche la nostra matrice culturale, tanto che qualcuno ha persino avanzato l'ipotesi, secondo me ben motivata, che i bambini cinesi abbiano un anno di vantaggio sugli altri nella comprensione e nella pratica della matematica grazie linguaggio utilizzato. Mi

spiego: in Cina, il modo di rappresentare i numeri è molto più pertinente al contenuto di quanto non lo siano le cifre arabe. In questo modo, i bambini si abituano fin da subito a considerare i numero "3" come "2+1", per esempio, e non come una cifra di cui imparare a memoria la sua forma per iscritto e il suo suono quando pronunciata.

E allora vorrei lanciare qui una piccola provocazione. Mi sono inventato un modo per rappresentare le cifre dallo zero al dieci che sia un po' più "costruzionista", come potete vedere bene nell'immagine che segue.



Ovviamente non è detto che questo sia il modo migliore o che io speri di vedere tra due anni tutti i bambini imparare queste cifre sui banchi di scuola. È stato però un esercizio creativo e stimolante per me in quanto ha attivato sia le mie competenze logico-razionali che artistico-creative.

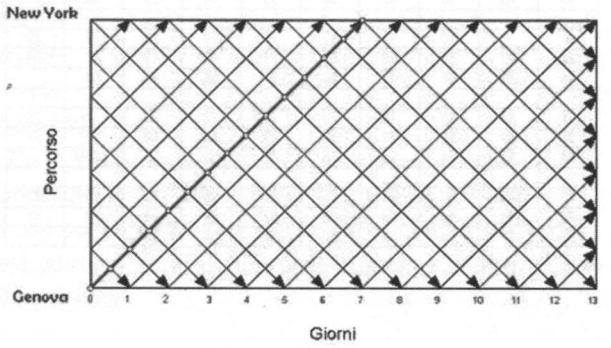
Perché non provate anche voi a inventare le vostre nuove cifre o, se siete insegnanti, a proporre questo esercizio ai vostri studenti? E dopo aver eletto il set più "bello", provate a fare qualche semplice operazione con le nuove cifre usandole al posto di quelle note.

Se vi va di condividerle, mandatemele e le pubblicherò sul sito www.ilmatematicocurioso.it. Magari potremo eleggere il set migliore.

Buon divertimento!

SOLUZIONI

La traversata dell'Atlantico (pag. 37)
Non sono solo 7 o 8 come si può credere a una prima analisi, infatti, non bisogna dimenticare che si incontrano anche le navi che sono salpate diversi giorni prima della nave presa in considerazione. Durante l'intero percorso si incontrano 15 navi, incluse quelle che si incrociano al porto. Ecco un diagramma che illustra la situazione con un fare molto matematico. Forse è un po' più complesso impostare tutto così, ma una volta fatto la soluzione è evidente



Alea jacta est (pag. 47)

$$P=P(_{\text{primo lancio}})\cdot P(_{\text{secondo lancio}})=\frac{18}{36}\cdot\frac{18}{36}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=0{,}25=25\%$$

$$P=P(_{\text{primo lancio}})\cdot P(_{\text{secondo lancio}})=\frac{18}{36}\cdot\frac{1}{36}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{36}=\frac{1}{72}\cong 0{,}014=1{,}4\%$$

$$P=P(_{\text{primo lancio}})\cdot P(_{\text{secondo lancio}})=\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{36}=\frac{1}{1296}\cong 0{,}00078=0{,}78\%$$

Come un computer! (pag. 73)
5 = 4+1 = 101
20= 16+4= 10100
100 = 64+32+4 = 1100100
1000 = 512+256+128+64+32+8 = 1111101000
1024 = 1024 (è una potenza di due, ovvero 2^{10}, quindi possiamo arrivare solo fino a 1023 come somme delle altre potenze minori).

Estendiamo! (pag. 105)

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
21	23	25	27	29	31	33	35	37	39
41	43	45	47	49	51	53	55	57	59
2	3	6	7	10	11	14	15	18	19
22	23	26	27	30	31	34	35	38	39
42	43	46	47	50	51	54	55	58	59
4	5	6	7	12	13	14	15	20	21
22	23	28	29	30	31	36	37	38	39
44	45	46	47	52	53	54	55	60	
8	9	10	11	12	13	14	15	24	25
26	27	28	29	30	31	40	41	42	43
44	45	46	47	56	57	58	59	60	
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	48	49	50	51
52	53	54	55	56	57	58	59	60	
32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
52	53	54	55	56	57	58	59	60	

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
21	23	25	27	29	31	33	35	37	39
41	43	45	47	49	Si	53	55	57	59
Gì	63	65	67	69	71	73	75	77	79
81	83	85	87	89	91	93	95	97	99
101	103	105	107	109	111	113	115	117	119
2	3	6	7	10	11	14	15	18	19
22	23	26	27	30	31	34	35	38	39
42	43	46	47	50	51	54	55	58	59
62	63	66	67	70	71	74	75	78	79
82	83	86	87	90	91	94	95	98	99
102	103	106	107	110	111	114	115	118	119
4	5	6	7	12	13	14	15	20	21
22	23	28	29	30	31	36	37	38	39
44	45	46	47	52	53	54	55	60	61
62	63	68	69	70	71	76	77	78	79
84	85	86	87	92	93	94	95	too	101
102	103	108	109	110	111	116	117	118	119
8	9	10	11	12	13	14	15	24	25
26	27	28	29	30	31	40	41	42	43
44	45	46	47	56	57	58	59	60	61
62	63	72	73	74	75	76	77	78	79
88	89	90	91	92	93	94	95	104	105
106	107	108	109	110	111	120			

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	48	49	50	51
52	53	54	55	56	57	58	59	60	61
62	63	80	81	82	83	84	85	86	87
88	89	90	91	92	93	94	95	112	113
114	115	116	117	118	119	120			
32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
52	53	54	55	56	57	58	59	60	61
62	63	96	97	98	99	100	101	102	103
104	105	106	107	108	109	110	111	112	113
114	115	116	117	118	119	120			
64	65	66	67	68	69	70	71	72	73
74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
84	85	86	87	88	89	90	91	92	93
94	95	96	97	98	99	100	101	102	103
104	105	106	107	108	109	110	111	112	113
114	115	116	117	118	119	120			

Il problema più antico della storia (pag. 124)
Case 71=7
Gatti 72=49
Topi 73=343
Spighe 74=2401
Heqat 75=16.807
Sommando tutte le cifre otteniamo un totale di 19.607 cose. A qualcuno potrebbe venire in mente che all'inizio si parla anche di una proprietà, perciò le "cose" di cui si parla in questa storia dovrebbero essere: 19.607+1=19.608.

Il calzino spaiato (pag. 143)
Ne bastano 3. Infatti se siamo stati sfortunati e il primo ha un colore diverso dal secondo, sicuramente il terzo ha colore uguale a uno dei due. Per estensione, in cassetto con N colori è sufficiente pescare N+1 calzini per essere sicuri di prenderne almeno 2 dello stesso colore.

Estendiamo? (pag. 153)
La distanza da percorrere è sempre 100 km, ma questa volta per trovare il tempo è necessario usare la somma fra le due velocità delle biciclette. La prima bici viaggia a 20 km/h, mentre la seconda a 30 km/h; la somma è dunque 50 km/h. A quella velocità, per percorrere 100 km, sono necessarie 2 ore. La mosca viaggia sempre a 50 km/h, per cui in 2 ore percorrerà la bellezza di 100 km.

Piacere mio! (pag. 183)
Se ognuno stringesse la mano 3 volte, ci sarebbero un totale di 3-9=27 strette di mano. Ma a ogni stretta di mano il numero totale delle strette aumenta di 2 unità. La risposta quindi è no, in quanto non è quindi possibile.

RINGRAZIAMENTI

Da matematico curioso mi piacerebbe inventare un metodo per scrivere i ringraziamenti con i giusti pesi, con il giusto ordine e con imparzialità, ma non sono ancora riuscito a trovarne uno che funzioni per un testo scritto, per cui procedo in ordine pseudo-casuale e sperando di non dimenticarmi nessuno.

Il primo ringraziamento va di sicuro allo staff editoriale Kowalski formato da Matteo Brambilla, Mita Gironda, Gaia Margutti e Martina Varnier, capitanato da una editor davvero speciale: Daniela De Rosa. Grazie per sostenermi, sopportarmi e incoraggiarmi. Un grazie speciale a Luca Giannini che mi segue più da vicino geograficamente e mi ha dato così tanto in questi mesi.

Un grazie alla mia famiglia, i cui componenti si sono rivelati fonte continua di ispirazione, nei miei ricordi, nel presente e spero anche per il futuro.

Un ringraziamento spetta ai matematici veri, quelli che lo fanno per professione e che mi hanno aiutato nella maturazione delle idee, dando stimoli ai miei pensieri: con

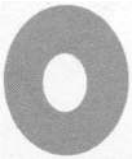
loro fare una chiacchierata è sempre un po' come respirare aria fresca. Il primo di questi è di sicuro Pino Rosolini, e poi Ettore Carletti, Roberto Lucchetti, Furio Honsell, Piergiorgio Odifreddi, Fioravante Patrone.

Un grazie a tutto lo staff della palestra della matematica MateFitness (www.matefitness.it): Cecilia, Luca, Omar, Andrea e di nuovo Pino Rosolini. Siete la mia gioia e la cosa migliore che posso dirvi è una citazione da un film che so che apprezzate: "Signori, è stato un piacere volare con voi". E aggiungo che spero vivamente che questo volo duri ancora molto a lungo.

Un ringraziamento a Domenico Rizzuto che con Ettore Carletti ha reso possibile la tavola rotonda su calcio e matematica che ho riportato nel testo.

Un grazie speciale porta il nome di una persona speciale, Franci. Grazie per il contributo "tecnico" a questo libro ma soprattutto per quello emotivo, per il cocktail di idee, sogni e sentimenti che sai suscitare dentro me.

E grazie anche a tutti coloro che mi creano problemi da risolvere: le banche che non mi volevano concedere il mutuo, gli uffici che ti fanno annegare nella burocrazia, quelli che prendono le misure sbagliate, quelli che scrivono un orario e poi è un altro, coloro che non sanno dare un'indicazione stradale, quelli che organizzare il lavoro è come dire una bestemmia, le assicurazioni, le compagnie aeree e quelle ferroviarie in costante ritardo ecc... Senza di voi avrei meno problemi da risolvere e il mio cervello si potrebbe quasi riposare per qualche frazione di secondo, impedendo così la formazione di soluzioni e, chissà, anche di nuove idee.



RISORSE

Bibliografia

Colin Conrad Adams, The knot book. An elementary introduction to the mathematical theory of knots, W.H. Free man & Company 2004 Andrea Bacciotti, Fulvio Ricci, Lezioni di analisi matematica (1 e 2), Editrice Levrotto&Bella 1991 Riccardo Bersani, Ennio Peres, Matematica. Corso di sopravvivenza, Tea 1998 Roberto Lucchetti, Di duelli, scacchi e dilemmi, Mondadori 2008 Piergiorgio Odifreddi, Il matematico impenitente, Longanesi 2008

Ennio Peres, Giochi matematici, Editori Riuniti 2007

Dava Sobel, Longitudine, Rizzoli 1996

Sitografia

Base5 http://utenti.qmpo.it/hase5

Sito del professor Franco Festa www.francofesta.it

Guardaqua www.guardaqua. it

MateFitness, la palestra della matematica www. matefitness. it

Progetto Polymath www2.polito.it/didattica/polymath

Francis E. Su e altri, "Brouwer Fixed Point Theorem"

Mudd Math Fun Facts www.math.hmc.edu/funfacts

Wikipedia www.wikipedia.org Wolfram http://mathworld.wolfram.com/